

# 1. Domaća zadaća

---

1.  $14 \text{ ft/s} = ? \text{ m/h}$
2.  $10 \text{ kg/L} = ? \text{ mg/mm}^3$
3.  $14 \text{ kcal}/(\text{m}\cdot\text{min}\cdot^\circ\text{C}) = ? \text{ kW}/(\text{cm}\cdot\text{K})$
4.  $23 \text{ lb/ft}^3 = \text{ g/dm}^3$
5. Izračunajte volumen 11 nmol idealnog plina u  $\text{km}^3$  koji se nalazi na temperaturi  $300^\circ\text{F}$  i tlaku 1,1 bar!

# Bilanca tvari

---

## Opća jednađba za bilancu tvari

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\text{ULAZ TVARI}} & - & \boxed{\text{IZLAZ TVARI}} \quad \pm \quad \boxed{\begin{array}{c} \text{TVAR} \\ \text{PROMIJENJENA} \\ \text{REAKCIJOM} \end{array}} \\ & = & \boxed{\begin{array}{c} \text{AKUMULACIJA} \\ \text{TVARI} \end{array}} \end{array}$$

# Bilanca tvari

---

## Oblik bilance tvari

### Fizikalni proces

$$\boxed{\text{ULAZ TVARI}} - \boxed{\text{IZLAZ TVARI}} = \boxed{\text{AKUMULACIJA TVARI}}$$

### Stacionarni fizikalni proces

$$\boxed{\text{ULAZ TVARI}} - \boxed{\text{IZLAZ TVARI}} = 0$$

# Bilanca tvari

---

## Oblik bilance tvari

### Nestacionarni kemijski proces

Reaktant:

$$\begin{array}{r} \boxed{\text{ULAZ TVARI}} - \boxed{\text{IZLAZ TVARI}} - \boxed{\text{POTROŠNJA TVARI}} \\ \text{REAKCIJOM} \\ = \boxed{\text{AKUMULACIJA}} \\ \text{TVARI} \end{array}$$

Produkt:

$$\begin{array}{r} \boxed{\text{ULAZ TVARI}} - \boxed{\text{IZLAZ TVARI}} + \boxed{\text{NASTANAK TVARI}} \\ \text{REAKCIJOM} \\ = \boxed{\text{AKUMULACIJA}} \\ \text{TVARI} \end{array}$$

# Bilanca tvari

---

## Oblik bilance tvari

### Stacionarni kemijski proces

Reaktant:

$$\boxed{\text{ULAZ TVARI}} - \boxed{\text{IZLAZ TVARI}} - \boxed{\text{POTROŠNJA TVARI REAKCIJOM}} = \boxed{0}$$

Produkt:

$$\boxed{\text{ULAZ TVARI}} - \boxed{\text{IZLAZ TVARI}} + \boxed{\text{NASTANAK TVARI REAKCIJOM}} = \boxed{0}$$

# Bilanca tvari

---

## Oblik bilance tvari

Stacionarni proces:

$$\text{AKUMULACIJA TVARI} = 0$$

# Bilanca tvari

---

## Tipovi bilance tvari

### **DIFERENCIJALNA BILANCA TVARI:**

**Diferencijalna bilanca tvari je bilanca koja pokazuje što se u procesu dogodilo u nekom vremenskom trenutku. Svaki član bilance se izražava brzinom. (ulazom i izlazom tvari, protokom, brzinom nastajanja ili nestajanja tvari itd). Ovaj tip bilance se primjenjuje na kontinuirane procese.**

# Bilanca tvari

---

## Tipovi bilance tvari

Diferencijalna bilanca tvari kontinuiranog stacionarnog procesa bez kemijske reakcije:

$$\boxed{\text{ULAZ TVARI}} = \boxed{\text{IZLAZ TVARI}}$$

**Primjer:** 1000 kg/h kapljevite smjese benzena (B) i toluena (T) koja sadrži 50 % benzena se razdvaja u dvije frakcije destilacijom u destilacijskoj koloni. Maseni protok benzena u izlaznom toku - destilat D, iznosi 450 kg B/h, a toluena u ostatku L 475 kg T/h. Proces je stacionaran. Treba izračunati nepoznate izlazne protoke.



# Bilanca tvari

---

## Tipovi bilance tvari

### **INTEGRALNA BILANCA TVARI:**

**Integralna bilanca tvari je bilanca koja pokazuje što se u procesu događalo između dva vremena. Svaki član bilance se tada izražava samo fizičkom veličinom – masom ili množinom tvari. Ovaj tip bilanci se primjenjuje na diskontinuirane, šaržne procese koji imaju početak i kraj.**

# Bilanca tvari

---

## Tipovi bilance tvari

**Integralna bilanca tvari diskontinuiranog procesa bez kemijske reakcije:**

$$\boxed{\text{ULAZ TVARI}} = \boxed{\text{IZLAZ TVARI}}$$

**Primjer: Otopina metanola i vode se drži u dva spremnika. U prvom otopina sadrži 40 % metanola, a u drugom 70 % metanola. Ako se 200 kg prve otopine pomiješa sa 150 kg druge koliko će se dobiti otopine i kojeg sastava?**

# Bilanca tvari

---

## Tipovi bilance tvari

### UKUPNA BILANCA TVARI

### BILANCA TVARI POJEDINE KOMPONENTE

# Bilanca tvari

---

## Tipovi bilance tvari

### BILANCE ATOMA:

$$n_{\text{atoma,ulaz}} = n_{\text{atoma,izlaz}}$$

### BILANCE MOLEKULA:

$$n_{\text{molekula reaktanta,ulaz}} \neq n_{\text{molekula reaktanta,izlaz}}$$

# Bilanca tvari

---

## Računanje temeljem bilanci tvari

**Pri rješavanju kemijsko inženjerskih problema treba koristiti inženjersku procjenu.**

**Treba misliti matematički, a matematiku uzeti kao egzaktnu znanost.**

# Bilanca tvari

---

## Računanje temeljem bilanci tvari

Problemi čije se rješenje temelji na bilancama tvari se svode na to da se pomoću zadanih vrijednosti nekih početnih ili ulaznih odnosno konačnih ili izlaznih procesnih varijabli izračunaju vrijednosti ostalih nepoznatih procesnih varijabli.

Rješavanje tih problema zahtjeva postavljanje i rješavanje jednadžbi kojima su matematički predočene bilance tvari, a u kojima su nepoznanice tražene procesne varijable.

Diferencijalna bilanca stacionarnih kontinuiranih procesa i integralna bilanca diskontinuiranih procesa se opisuju linearnim jednadžbama.

# Bilanca tvari

---

## Računanje temeljem bilanci tvari

### *Početni problemi:*

- ⇒ matematički opis fizičkog ili kemijskog procesa
- ⇒ povezivanje teorije i stvarnog problema
- ⇒ svodenje kompleksnog na jednostavniji problem
- ⇒ pravilno postavljanje pitanja

# Bilanca tvari

---

## Računanje temeljem bilanci tvari

### ANALIZA STUPNJEVA SLOBODE:

**Analiza stupnjeva slobode je postupak pri kojemu se prije početka bilo kakvih računanja treba utvrditi da li postoji dovoljno podataka o problemu, te što su nepoznanice i koliko jednadžbi se za dani problem može napisati.**

**Izvor jednadžbi su:**

- 1. Bilance tvari**
- 2. Bilance energije**
- 3. Dodatni podatak o procesu (u procesu se upari 40% vode koja je bila u ulaznoj komponenti A ili konverzija reaktanta A u procesu je 85 %)**
- 4. Fizičko ograničenje (suma molarnih udjela svih tvari jednaka 1 ( $x_A + x_B + x_C = 1$ ))**



# Bilanca tvari

---

## Računanje temeljem bilanci tvari

Broj stupnjeva slobode ( $N_{df}$ ) se određuje prema

$$N_{df} = N_{\text{nepoznanica}} - N_{\text{nezavisnih jednadžbi}}$$

Ako je  $N_{df} = 0$ , postoji dovoljan broj nezavisnih jednadžbi da se problem rješi.

Ako je  $N_{df} > 0$ , broj nepoznanica je veći od broja nezavisnih jednadžbi, te problem bez dodatnih podataka nije moguće riješiti.

Ako je  $N_{df} < 0$ , broj nepoznanica je manji od broja nezavisnih jednadžbi, što znači da ima previše jednadžbi koje mogu dovesti do krivog rješenja, te treba dobro analizirati sve podatke i bilance tvari.

# Bilanca tvari

---

## Postupak rješavanja bilanci tvari

1. **Analizirati problem!** Dobro pročitati opis fizičkog ili kemijskog procesa i na temelju raspoloživih podataka označiti što je problem i što treba izračunati.
  2. Nacrtati procesnu shemu i na njoj označiti sve procesne tokove, te unijeti raspoložive podatke, a one koji nedostaju pronaći u inženjerskim priručnicima ili literaturi.
  3. Odabrati pogodnu bazu – temelj računanja. To treba biti onaj podatak uz pomoć kojega je problem moguće najbrže riješiti.
  4. Sve procesne varijable izraziti u istim jedinicama.
  5. Napisati jednadžbe za bilancu tvari. U svakom procesu je moguće napisati jednadžbu za ukupnu bilancu tvari, te jednadžbe za bilancu svake pojedine komponente.
- Maksimalni broj nezavisnih linearnih jednadžbi za bilancu tvari u procesu bez kemijske reakcije jednak je broju kemijskih komponenti tvari u ulaznim i izlaznim tokovima. Broj nezavisnih jednadžbi mora biti jednak broju nepoznatih procesnih varijabli da se problem može riješiti.*
6. Napraviti analizu stupnjeva slobode.
  7. Riješiti sustav jednadžbi i dobivene vrijednosti procesnih varijabli unijeti na procesnu shemu.

# Bilanca tvari

---

## Rješavanje sustava linearnih jednažbi

**Riješiti se može samo sustav nezavisnih jednažbi!**

**Pri procesima bez kemijske reakcije vrijedi pravilo da je broj nezavisnih jednažbi za bilancu tvari -  $N_{\text{nezavisnih jednažbi}}$  jednak broju komponenata -  $N_k$  u procesu.**

**Pri procesima s kemijskom reakcijom ovo pravilo ne vrijedi.**

## Rješavanje sustava linearnih jednažbi

**Ako se koeficijenti linearnih jednažbi prikažu u matričnom obliku broj nezavisnih jednažbi se može utvrditi pomoću određivanja ranga matrice.**

# Bilanca tvari

---

## Rang matrice

Rang pravokutne matrice  $A$  razreda  $(m,n)$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \bullet & \bullet & \bullet & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \bullet & \bullet & \bullet & a_{2n} \\ \bullet & \bullet & & & & & \bullet \\ \bullet & \bullet & & & & & \bullet \\ \bullet & \bullet & & & & & \bullet \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \bullet & \bullet & \bullet & a_{mn} \end{bmatrix}$$

je red najveće regularne kvadratne podmatrice matrice  $A$ . Označava se:

$$\text{rang}(A) = r(A) = r$$

# Bilanca tvari

---

## Rang matrice

**Ako je rang matrice  $A$  jednak  $r$ , to znači da postoji barem jedna regularna kvadratna podmatrica  $r$ -tog reda u matrici  $A$  ili drugim riječima,  $r$  je red najveće subdeterminantne matrice  $A$  različite od nule.**

# Bilanca tvari

---

## Rang matrice

Rang se matrice može odrediti tako da se nizom operacija, koje ne mijenjaju rang, zadanu matricu transformira u takvu matricu kojoj je lako odrediti rang.

Elementarnim transformacijama nad recima se zadanu matricu  $A$  prevodi u oblik:

$$A^T = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1r} & b_{1r+1} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{2r} & b_{2r+1} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{3r} & b_{3r+1} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & & & & & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & & \cdot & & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & b_{rr} & b_{rr+1} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ & & & & & & \cdot & & & & & \cdot \\ & & & & & & \cdot & & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{array} \right]$$

$b_{ii} \neq 0$ , za  $i = 1, 2, \dots, r$

odnosno svodi se na matricu koja u gornjem lijevom uglu sadrži gornju trokutastu regularnu matricu  $r$ -tog reda, a elementi ostalih  $(m-n)$  redaka jednaki su nuli.

Broj elemenata na glavnoj dijagonali trokutaste matrice, koji nisu jednaki nuli (nenultih), jednak je  $r$  i jednak je rang matrice  $A$ .

# Bilanca tvari

---

## RANG MATRICE

**Broj nezavisnih jednađbi jednog sustava linearnih jednađbi je jednak:**

$$N_{\text{nezavisnih jednađbi}} = r$$

**Nezavisne jednađbe su one jednađbe čiji su koeficijenti iz matrice  $A$  nakon transformacija sadržani u trokutastoj matrici.**



## Rješavanje sustava linearnih jednažbi

- **Gaussova metoda eliminacije ili kraće Gaussova metoda je jedna od najrasprostranjenijih metoda za numeričko rješavanje sustava linearnih jednažbi.**

# Bilanca tvari

---

## Gaussova metoda eliminacije

Neka sustav linearnih jednadžbi izgleda kao:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2$$

.

.

.

$$a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nn} \cdot x_n = b_n$$

# Bilanca tvari

---

## Gaussova metoda eliminacije

Ako se prva jednađba sustava pomnoži s  $[-a_{21}/a_{11}]$  i zbroji s drugom, a zatim pomnoži s  $[-a_{31}/a_{11}]$  i zbroji s trećom i tako na kraju ako se pretposljednja jednađba  $(n-1)$  pomnoži s  $[-a_{n1}/a_{11}]$  i zbroji s posljednjom  $n$ -tom jednađbom dobije se novi ekvivalentni sustav jednađbi:

$$\begin{array}{r} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{array}$$

# Bilanca tvari

---

## Gaussova metoda eliminacije

Na taj način se  $i$ -ta jednažba mijenja jer se  $k$ -ta jednažba množi s  $[- a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}]$  i zbraja s  $i$ -tom jednažbom. Pri tome se koeficijent  $a_{ij}^{(k)}$  transformira u koeficijent  $a_{ij}^{(k+1)}$  čija je vrijednost :

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)} \cdot a_{kj}^{(k)}$$

pri čemu je  $k = 1, \dots, n-1$ ;  $j = k+1, \dots, n+1$ ;  $i = k+1, \dots, n$ ;  $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$ ;  $a_{i, n+1}^{(k)} = b_i^{(k)}$ .

Povratna zamjena je opisana jednažbom:

$$x_i = 1 / a_{ii}^{(i)} \cdot (a_{i, n+1}^{(i)} - \sum_{j=k+1}^n a_{ij}^{(i)} x_j)$$

gdje je  $i = n, n-1, 1$ .

# Bilanca tvari

---

## Gaussova metoda eliminacije

Sustav linearnih jednadžbi se može prikazati u matričnom obliku:

$$A \cdot \vec{x} = B$$

Uz pretpostavku da je determinanta = 0 slijedi da je:

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot B$$

# Bilanca tvari

---

## Pravila pri rješavanju bilanci tvari

**Ukupna masa tvari na ulazu (početku) procesa mora biti jednaka ukupnoj masi tvari na izlazu (kraju) procesa.**

**Masa pojedine komponente na ulazu (početku) procesa nije jednaka masi te komponente na izlazu (kraju) procesa ako ta komponenta reagira u procesu.**

**Množina molekula na ulazu (početku) procesa ne mora biti jednaka množini molekula na izlazu (kraju) procesa ako u procesu dolazi do kemijske reakcije.**

**Množina atoma na ulazu (početku) procesa mora biti jednaka množini atoma na izlazu (kraju) procesa.**

# Bilanca tvari

---

## Pravila pri rješavanju bilanci tvari

Jednakost ulaza i izlaza [(+) ulaz = izlazu, (-) = ulaz  $\neq$  izlazu]

<b>Bilanca</b>	<b>Fizička veličina kojom je izražena količina tvari u procesu</b>	<b>Proces bez kemijske reakcije</b>	<b>Proces s kemijskom reakcije</b>
<b>Ukupna</b>	<b>masa - <math>m</math></b>	<b>+</b>	<b>+</b>
<b>Ukupna</b>	<b>množina tvari - <math>n</math></b>	<b>+</b>	<b>-</b>
<b>Komponente</b>	<b>masa - <math>m</math></b>	<b>+</b>	<b>-</b>
<b>Komponente</b>	<b>množina molekula - <math>n</math></b>	<b>+</b>	<b>-</b>
<b>Komponente</b>	<b>masa atoma - <math>m</math></b>	<b>+</b>	<b>+</b>
<b>Komponente</b>	<b>množina atoma - <math>n</math></b>	<b>+</b>	<b>+</b>

# Bilanca tvari

---

## Pravila pri rješavanju bilanci tvari

Dakle možemo zaključiti da je u stacionarnim procesima bez kemijske reakcije masa tvari na ulazu ili množina tvari na ulazu jednaka masi tvari na izlazu ili množini tvari na izlazu, bez obzira da li se radi o ukupnoj bilanci ili bilanci pojedine komponente.

U stacionarnim procesima s kemijskom reakcijom je ukupna masa tvari ili masa atoma na ulazu jednaka ukupnoj masi tvari ili masi atoma na izlazu, međutim masa molekula jedne tvari na ulazu nije jednaka masi molekula te tvari na izlazu iz procesa, jer se kemijskom reakcijom tvar promijenila.

Isto tako nije ukupna množina tvari na ulazu jednaka ukupnoj množini tvari na izlazu iz procesa, jer množina molekula neke tvari na ulazu nije jednaka množini molekula te tvari na izlazu iz procesa. Poznato je da se kemijskom reakcijom mijenja množina tvari kao primjerice u reakciji vodika i dušika.



# Bilanca tvari

---

## Bilanca tvari procesa s jednom procesnom jedinicom bez kemijske reakcije

**DESTILACIJA**

**PRIPREMA OTOPINA**

**ADSORPCIJA**

**KRISTALIZACIJA**

**ABSORPCIJA**

**SUŠENJE**

## 2. Domaća zadaća

---

Opisno definirati problem i odrediti nepoznate veličine (B – benzen; T – toluen).

