Mehanički rad fluidne čestice

Da bi fluidna čestica promijenila svoj obujam, potrebno je izvršiti mehanički rad. Ako čestica povećava svoj obujam onda kažemo da ona nad okolinom obavlja rad, a ako se njezin obujam smanjuje onda kažemo da je nad česticom obavljen rad. U prvom slučaj rad smatramo pozitivnim, u drugom negativnim. Uzmimo da čestica poveća svoj obujam tako da "prema van" pomakne jedan dio svoje površine. Označimo taj dio površine kao $d\vec{S}$. No, to je usmjerena površina, i očito je da će se obujam promijeniti (povećati) jedino ako se dotični element površine pomakne u smjeru same površine. Označimo taj pomak kao $d\vec{r}$. Mehanički rad je umnožak sile i pomaka (skalarni umnožak dvaju vektora). Sila na spomenuti element površine, kojom čestica mora "iznutra" djelovati da bi povećala svoj obujam, jednaka je

$$d\vec{F} = +p\,d\vec{S}$$

Mehanički je rad tada jednak

$$dW = d\vec{F}\cdot d\vec{r} = p\,d\vec{S}\cdot d\vec{r} = p\,dV$$

Ovo je vrlo važna jednakost u mehanici fluida. Nju možemo shvatiti i opisati ovako:
budući da je tlak, kao sila na jedinicu površine fluidne čestice, veličina neovisna o smjeru u prostoru (izotropnost tlaka), mehanički rad, koji u mehanici materijalne čestice određujemo kao umnožak sile i pomaka, u mehanici fluidne čestice moramo

uzeti "izotropni pomak", tj. u svim smjerovima isto, što znači da zapravo moramo uzeti promjenu obujma, a umjesto sile moramo uzeti tlak.

Površinska napetost

Tu pojavu, koja je svojstvena tekućinama, možemo najprirodnije opisati nečime što nam je dohvatljivo u svakodnevnu iskustvu. Recimo, napuhivanje balončića od sapunice. Da bismo povećali obujam balončića za dV , moramo izvršiti rad

$$dW = (p - p_0)\,dV$$

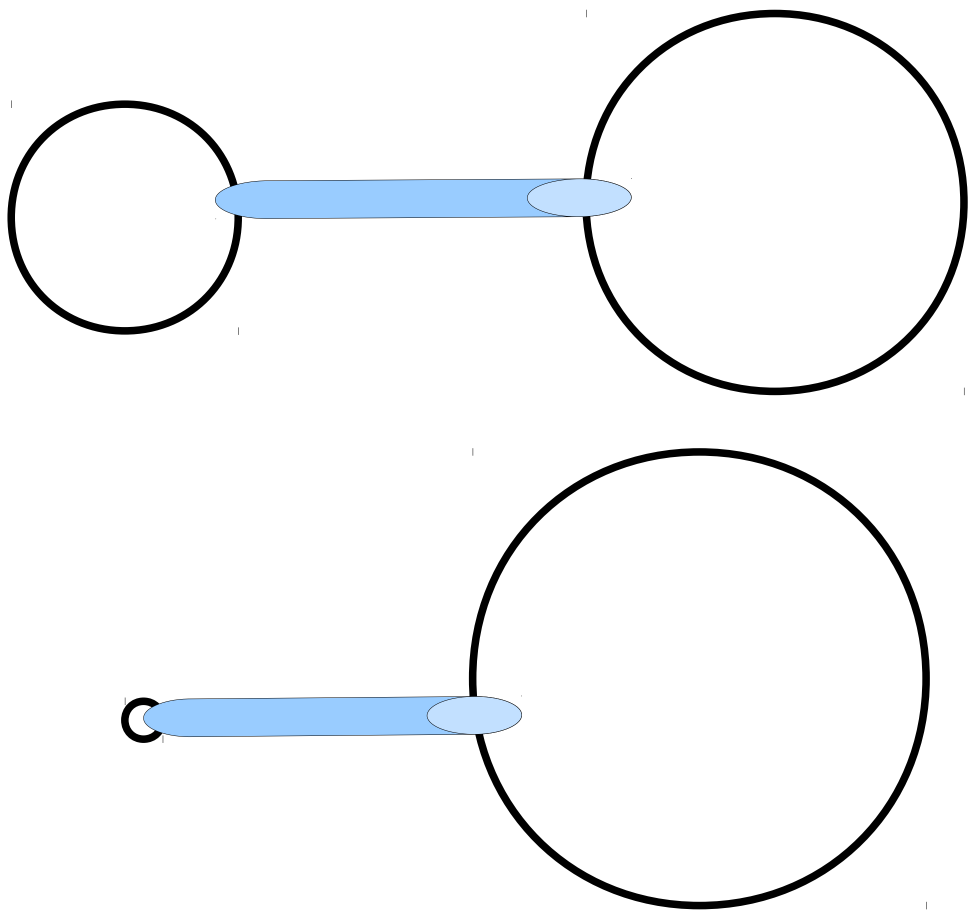
gdje je p tlak unutar balončića, a p_0 je tlak izvan njega. Očito je tlak unutar balončića veći od vanjskog tlaka. Što drži tu razliku tlakova? Drži ju površinska napetost. Naime, napuhivanje balončića povećava njegovu površinu i s vanjske i s unutarnje strane. Ukupna promjena površine je $2\,dS$. No ta promjena površine balončića troši energiju koja je razmjerna samoj promjeni površine. Dakle, izvršeni rad je jednak

$$dW = \sigma\, 2\, d\,S$$

Izjednačavajući ova dva izraza za jedan te isti rad, dobivamo

$$2\sigma\, d\,S = (p - p_0)\, d\,V \quad , \quad p - p_0 = 2\sigma \frac{d\,S}{d\,V} = 2\sigma \frac{4\pi\, 2\, r\, d\, r}{\frac{4\pi}{3} 3\, r^2\, d\, r} = \frac{4\sigma}{r}$$

Ovdje je σ koeficijent površinske napetosti. Dobili smo rezultat da je razlika unutarnjeg i vanjskog tlaka obrnuto razmjerna polumjeru balončića. To konkretno znači ovo: ako spojimo cjevčicom dva balončića različite veličine, onda će se manji balončić ispuhati, a veći će se povećati !



Površinska napetost nastoji smanjiti promjenu površine zato što povećanje površine zahtijeva energiju. Ako ste u navedenom primjeru očekivali da će se spajanjem veličine balončića izjednačiti, pogrješno ste mislili. Naime, kad bi se veličine balončića izjednačile, onda bi ukupna promjena površine bila jednaka

$$\Delta S_{isti} = 2 \cdot 4\pi \left(2R^2 - R_1^2 - R_2^2\right)$$

uz očuvanje ukupne materije (tj zraka u balončićima)

$$2R^3 = R_1^3 + R_2^3 \;\Rightarrow\; \Delta S_{isti} = 8\pi \left[2^{\frac{2}{3}} \left(R_1^3 + R_2^3\right)^{\frac{2}{3}} - R_1^2 - R_2^2\right]$$

No, u slučaju kad se manji balončić potpuno ispuše, a veći još poveća, ukupna promjena površine je

$$\Delta S_{ispuh} = 8\pi \left(R^2 - R_1^2 - R_2^2\right) \;,\; R^3 = R_1^3 + R_2^3 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \Delta S_{ispuh} = 8\pi \left[\left(R_1^3 + R_2^3\right)^{\frac{2}{3}} - R_1^2 - R_2^2\right] < \Delta S_{isti}$$

Površinska napetost tekućine u dodiru s nekom čvrstom stijenkom nastoji smanjiti promjenu površine tekućine, koja dolazi od međudjelovanja tekućine i tvari od koje je stijenka napravljena. To međudjelovanje može biti slabije od međumolekulskih sila u tekućini, koje je odgovorno za površinsku napetost. U tom slučaju, kada su sile adhezije slabije od sila kohezije, površina će se tekućine u blizini stijenke savinuti prema dolje. To znači da će tlak neposredno ispod te površine biti veći od vanjskog tlaka. U suprotnom, kada su sile adhezije jače od sila kohezije, površina se tekućine u blizini stijenke savine prema gore, pa je zbog toga tlak neposredno ispod te površine manji od vanjskog tlaka.

To znači da će u prvom slučaju tekućinu u cjevčici uronjenoj u istu tekućinu morati poći prema dolje, pa imamo pojavu tzv. kapilarne depresije. U drugom će slučaju tekućina u cjevčici morati poći prema gore, pa imamo tzv. kapilarnu elevaciju.
U oba će slučaja razlika tlakova biti jednaka

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r} \cos(\theta)$$

gdje je θ **okrajnji kut**, koji nekako ovisi o odnosu adhezijskih i kohezijskih sila. U slučaju "ne-močenja" imat ćemo nadtlak ispod površine, pa će se razina tekućine u cjevčici morati spustiti, a u slučaju močenja imat ćemo podtlak ispod površine pa će se tekućina u cjevčici morati podići.

Općenito će dodavanje nekih tvari topljivih u tekućini bitno mijenjati površinsku napetost tekućine. Recimo, dodavanje sapuna u vodu smanjuje njezinu površinsku napetost, pa voda lakše ulazi u sitnije cjevčice (tj. u vlakna u tkanini) i odnosi sa sobom prljavštinu.

Osim toga, kapilarna je elevacija doslovce životno važna za biljke i visoka drveća, jer je to jedini način da voda stigne u najviše dijelove drveta.

DINAMIKA FLUIDA

Idealni fluid

Idealni fluid ćemo definirati kao fluid u kojem ne postoji trenje između fluidnih čestica. Budući da to trenje može doći do izražaja jedino ako postoji nekakva relativna brzina između "susjednih" čestica, idemo vidjeti kako se može opisati gibanje idealnog fluida.

1.) Fluidna čestica na mjestu $\vec{r}$ u trenutku t ima neku brzinu $\vec{v}(\vec{r},t)$. Dakle, u fluidu postoji **brzinsko polje.** Razumije se da vrijedi ista definicija brzine kao i za običnu materijalnu česticu, a ta je

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}(\vec{r},t)$$

2.) Gibajući se, fluidna čestica zadržava svoju masu. Međutim, obujam i gustoća čestice mogu se mijenjati. Mi ćemo se baviti **nestlačivim fluidima**, kojima je gustoća stalna. Prema tome i obujam čestice mora biti stalan. Ako zamislimo da je u intervalu vremena dt napravila pomak $d\vec{r}$ i ako je površina čestice u smjeru njezina gibanja jednaka S, onda je ona svojim pomakom "ostvarila" obujam

$$dV=S\left|d\vec{r}\right|=S\,v\,dt$$

Budući da taj obujam mora biti stalan, slijedi da je umnožak brzine čestice i površine okomitu na tu brzinu stalan. To je **jednadžba kontinuiteta za nestlačive fluide.**

3.) Drugi Newtonov zakon za fluidnu česticu vrijedi jednako kao i za bilo koju drugu česticu

$$\rho \Delta V \frac{d\vec{v}(\vec{r},t)}{dt} = -\Delta V \vec{\nabla} p + \Delta \vec{F}$$

gdje je $\Delta \vec{F}$ bilo koja druga vanjska konzervativna sila koja djeluje na fluidnu česticu obujma ΔV. Naprimjer, za težinu ćemo imati

$$\Delta \vec{F} = \Delta m \vec{g} = \rho \Delta V \vec{g}$$

pa jednadžba gibanja ima oblik

$$\frac{d\vec{v}(\vec{r},t)}{dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g}$$

Iz ove jednadžbe **i jednadžbe kontinuiteta** trebali bismo izračunati brzinsko polje idealnog nestlačivog fluida u homogenom gravitacijskom polju.
Ako brzinsko polje ne ovisi eksplicitno o vremenu, onda govorimo o stacionarnom strujanju fluida. Brzina fluidne čestice ovisi samo o njezinu položaju. Tada možemo govoriti i o strujnicama, kao čvrstim "crtama" u fluidu, po kojima se gibaju fluidne čestice. Možemo li takve "crte" nekako vidjeti? Možemo. To ćete vidjeti u pokusu Hele-Shaw.

Bernoullijeva jednadžba

Za gibanje fluidnih čestica vrijede i zakoni očuvanja ukupne energije. Za idealne je fluide ukupna energija fluidne čestice očuvana. Ta se energija sastoji od kinetičke i potencijalne, ali za fluidnu česticu i s jednim dodatkom—ostale čestice djeluju na nju tlakom, pa taj tlak vrši rad nad česticom. Po teoremu o radu i energiji imamo

$$\frac{\Delta m \vec{v}^2}{2} + \Delta m g h + p \Delta V = konst.$$

$$\frac{\rho \vec{v}^2}{2} + \rho g h + p = konst.$$

Ovdje je kao potencijalna energija uvrštena gravitacijska potencijalna energija, jer je to najčešći slučaj. Razumije se da treba pribrojiti sve oblike potencijalne energije koje čestica ima.

Gustoća kinetičke energije može se zvati i **dinamičkim tlakom,** a tlak p je **statički tlak.** Dakle, ako se fluid giba bez promjene visine u gravitacijskom polju, onda Bernoullijevu jednadžbu možemo izreći u pogodnom obliku:

zbroj dinamičkog i statičkog tlaka ostaje stalan.

Ovaj jednostavan zakon, premda strogo vrijedi samo za idealne nestlačive fluide, može se približno primijeniti na sve fluide. Vrlo su jake i značajne posljedice ovoga zakona; s pomoću njega možemo tumačiti dinamički uzgon i let zrakoplova.

Realni fluidi

Realnim fluidima zovemo fluide u kojima, pri njihovu gibanju, postoji trenje. Naime, fluidna čestica ima svoju površinu. Kada fluid miruje, postoji samo sila na tu česticu u obliku tlaka na njezine stranice. Ako se fluid giba, fluidne čestice mogu imati različite brzine, pa će dvije susjedne čestice, koje dijele jednu površinu, "strugati" jedna o drugu, tj. djelovat će međusobno nekom silom trenja. Tu silu zovemo **viskoznom silom**, odnosno viskoznošću. Jasno je da ta sila rasipa energiju čestice. No, fluid se giba obično po nekoj cijevi, pa prianja uz tu cijev tako da mu brzina na stijenki iščezava, također zbog trenja. Dakle, brzina fluida uz stijenku jednaka je 0, a u ostalim dijelovima nije 0, jer inače ne bismo uopće imali nikakvo gibanje. To znači da u cijevi postoji razdioba, ili **profil brzina,** tako da je brzina to veća što je čestica udaljenija od stijenke. Naravno da se za ovo mogu napisati odgovarajuće jednadžbe, ali je rješavanje tih jednadžbi uglavnom težak i zahtjevan problem. Spomenimo samo da viskozna sila za nestlačive fluide ima oblik

$$\Delta \vec{F} = \eta \Delta V \vec{\nabla}^2 \vec{v}$$

gdje je η koeficijent viskoznosti.

Za razdiobu brzina unutar okrugle ravne i vodoravne cijevi dobijemo ovakav izraz

$$v(r) = -\frac{1}{4\eta}\frac{\Delta p}{\Delta x}(R^2 - r^2)$$

a za ukupni protok Q dobijemo

$$Q = \frac{\pi}{8\eta}\frac{|\Delta p|}{\Delta x}R^4$$

Ukupni protok, dakle, ovisi o četvrtoj potenciji polumjera cijevi. To je životno važan odnos protoka i polumjera. Naprimjer, ako se polumjer žile u ljudskom tijelu zbog nekog razloga smanji za samo 10%, protok krvi kroz tu žilu smanjit će se za više od 34%. Primijetimo da je spomenuti odnos obrnuto razmjeran koeficijentu viskoznosti. To znači da protok realnih fluida kroz cijev ne možemo usporediti s protokom idealnog fluida kroz istu cijev tako da viskoznost izjednačimo s 0. Protok realnog fluida zahtijeva postojanje razlike tlakova na krajevima cijevi, za razliku od idealnog fluida za čiji protok nije potrebna nikakva razlika tlakova. Realni fluidi "troše" tlak, tj. rasipaju energiju na svoje unutrašnje trenje, zbog čega dolazi do pada tlaka kojega moramo "nadoknađivati" izvana.