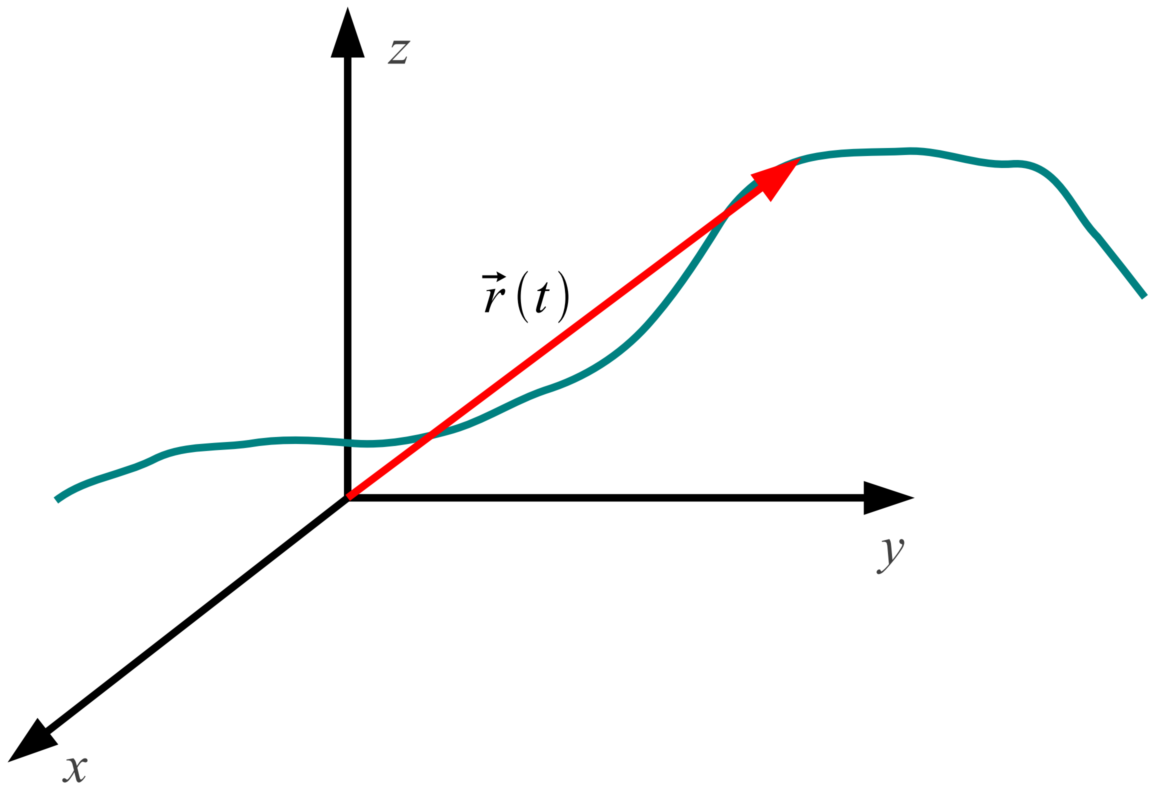
KINEMATIKA

- Opis gibanja **materijalne točke** bez obzira na uzrok gibanja.

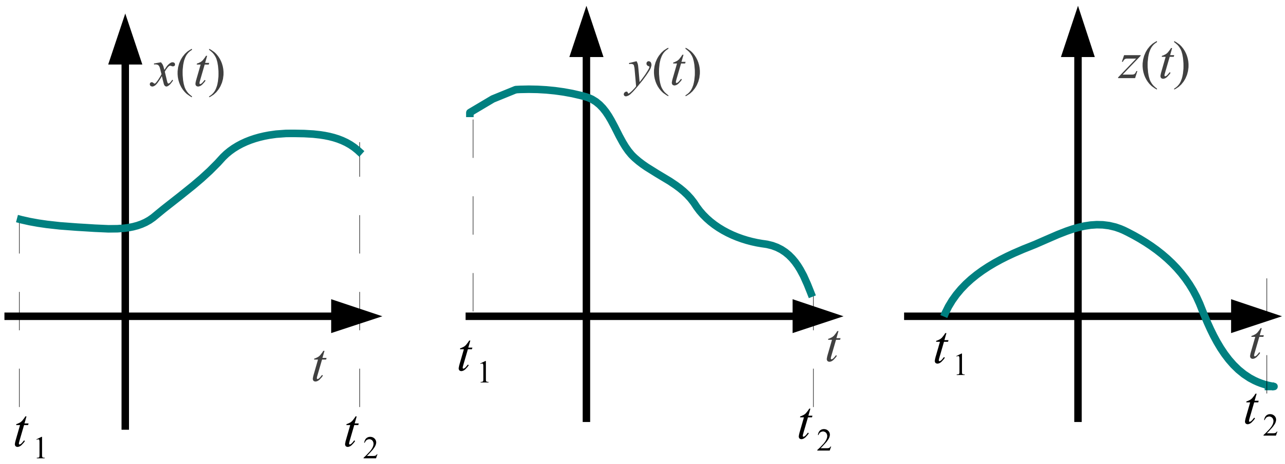
- **Materijalna točka** je zamišljena točka kojom zamjenjujemo stvarno tijelo, tako da ne uzimamo u obzir veličinu tijela ni njegov oblik.

- Ključne veličine u opisu gibanja su **položaj materijalne točke** i **vrijeme.**

- **Vektor položaja** materijalne točke, $\vec{r}$, je **funkcija** vremena *t*.



- Vrh vektora položaja u nekom intervalu vremena opisuje **krivulju gibanja.**
- Komponente vektora položaja su funkcije vremena: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$



- **Parametarski oblik krivulje gibanja**---vrijeme je parametar gibanja.

POMAK

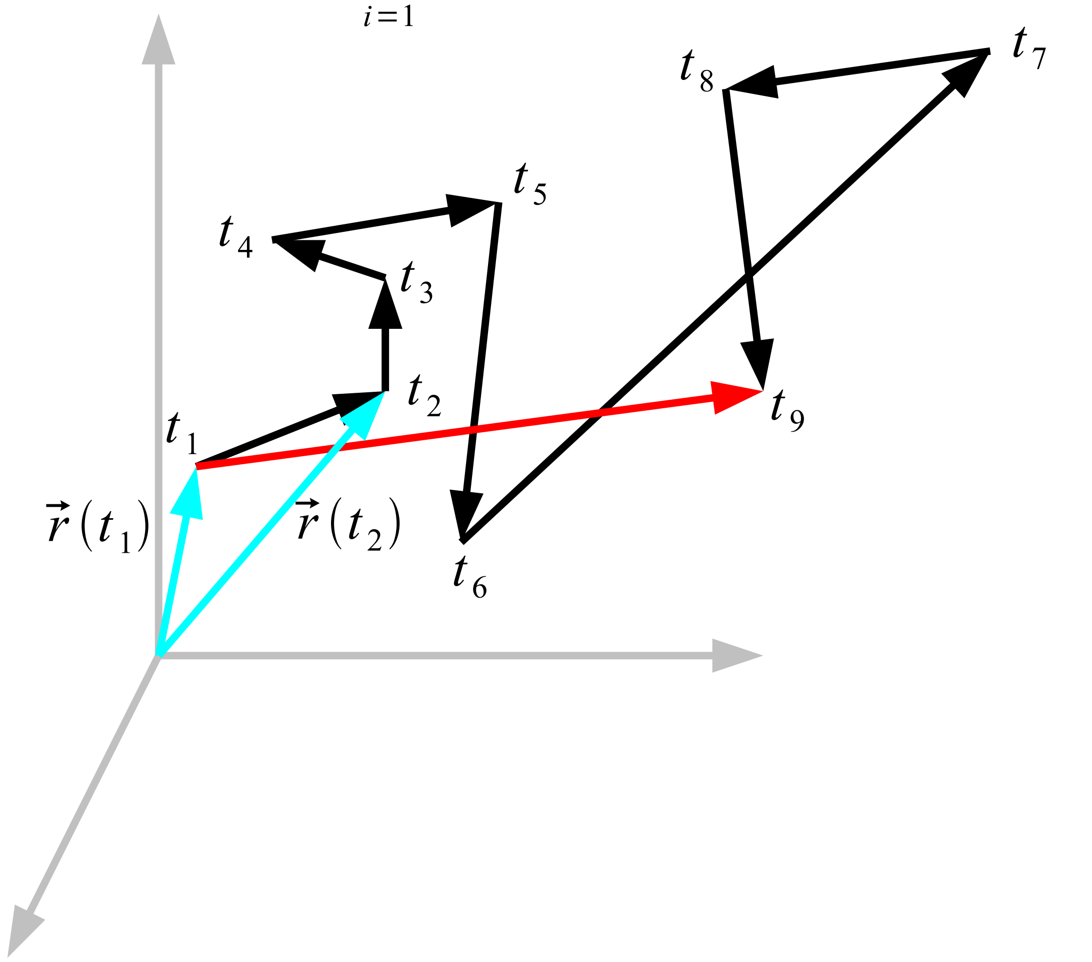
- Vektor $\Delta\vec{r}(t_1, t_2) = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$, $t_2 > t_1$
- Interval vremena $\Delta t = t_2 - t_1$
- Pomaka u intervalu vremena možemo pisati kao:

$$\Delta\vec{r}(t, \Delta t) = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

- Pomak nije funkcija **samo** trenutka, nego i intervala vremena.

- Ukupni pomak je zbroj svih pomaka

$$\left(\Delta \vec{r}\right)_{ukupni} = \sum_{i=1}^{i=N-1} \left(\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)\right) = \vec{r}(t_N) - \vec{r}(t_1)$$



- Ukupni prijeđeni put je jednak zbroju pojedinačnih prijeđenih putova ("koraka")

$$s = \sum_{i=1}^{i=N-1} \left|\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)\right|$$

- Općenito vrijedi

$$s \neq \left|\left(\Delta \vec{r}\right)_{ukupni}\right|$$

Jednadžba

$$s = \left|(\Delta \vec{r})_{ukupni}\right|$$

vrijedi samo ako su svi pomaci istoga smjera i orijentacije !

Primjer:

U četiri trenutka t_1 , t_2 , t_3 i t_4 vektori položaja čestice bili su

$$\vec{r}_1 = (3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})\,m$$
$$\vec{r}_2 = (\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k})\,m$$
$$\vec{r}_3 = (2\vec{i} + 4\vec{k})\,m$$
$$\vec{r}_4 = (5\vec{j} - 6\vec{k})\,m$$

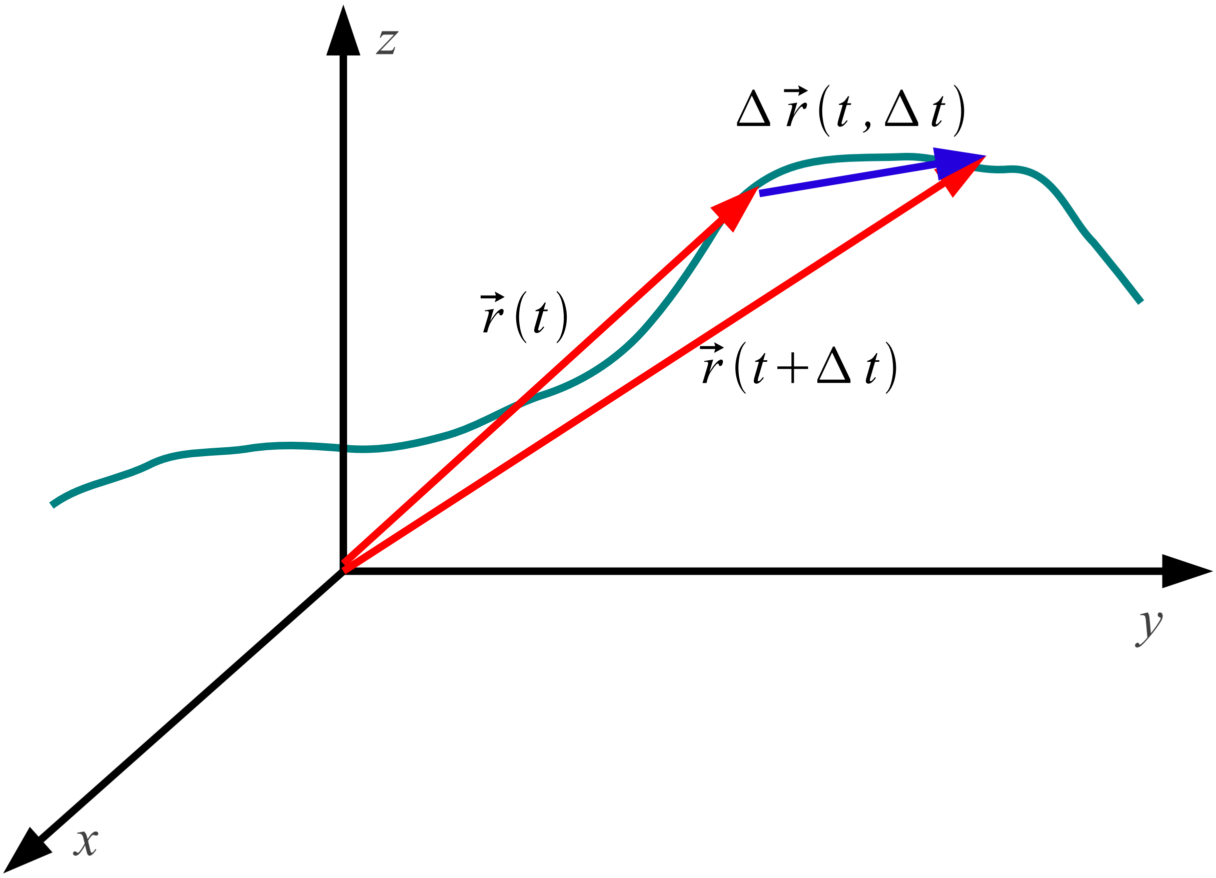
Izračunajte ukupni pomak i ukupni prijeđeni put čestice.
Odgovor:
Pomaci su:

$$\Delta\vec{r}_{12} = (-2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k})\,m \quad , \quad \Delta\vec{r}_{23} = (\vec{i} - \vec{j} + 9\vec{k})\,m$$
$$\Delta\vec{r}_{34} = (-2\vec{i} + 5\vec{j} - 10\vec{k})\,m$$

Ukupni pomak je $(\Delta\vec{r})_{ukupni} = (-3\vec{i} + 7\vec{j} - 7\vec{k})\,m$

Ukupni prijeđeni put je: $s = (7 + \sqrt{83} + \sqrt{129})\,m \approx 24{,}47\,m$

Iznos ukupnog pomaka $\left|(\Delta\vec{r})_{ukupni}\right| = \sqrt{107}\,m \approx 10{,}34\,m$



Čestica ne može u jednom trenutku imati više od jednog položaja.

$$\Delta\vec{r}(t,0)=0$$

(Što biste naveli kao eksperimentalni dokaz?)

Trenutni pomak je uvijek jednak 0 !

PROSJEČNA I TRENUTNA BRZINA

Definicija prosječne brzine

$$\langle\vec{v}(t,\Delta t)\rangle=\frac{\Delta\vec{r}(t,\Delta t)}{\Delta t}$$

Može li se **trenutna brzina** dobiti iz prosječne brzine tako da jednostavno u izraz za nju uvrstimo $\Delta t = 0$?
Ne.

Dobili bismo razlomak $\frac{0}{0}$, koji je neodređen. Zbog toga se tom izrazu moramo "približavati" posebnim postupkom, tako da tijekom toga postupka pokratimo po volji mali nazivnik (koji ipak nije 0) s isto takvim po volji malim faktorom u brojniku. Kada dođemo do toga da u nazivniku više nemamo po volji mali broj, naime vremenski interval, onda u ono što nam ostane možemo jednostavno uvrstiti $\Delta t = 0$. Taj postupak se zove **deriviranje** (diferenciranje), a po volji male veličine se zovu **infinitezimalne** veličine (diferencijali).

TRENUTNA BRZINA

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \vec{v}(t, \Delta t) \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t, \Delta t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Trenutna brzina je derivacija vektora položaja po vremenu.
Smjer trenutne brzine je tangenta na krivulju gibanja u datoj točci.
Možemo to i ovako reći:
Infinitezimalni pomak $d\vec{r}(t)$ razmjeran je infinitezimalnom intervalu vremena dt u kojem se je pomak ostvario. Vektor koji povezuje te dvije veličine je vektor trenutne brzine.

Primjer
x-komponenta vektora položaja čestice ovisi o vremenu po zakonu $x(t)=A\cdot t^3$, gdje je $A=1\,ms^{-3}$. Izračunajte *x*-komponentu trenutne brzine u trenutku *t*=1 *s,* i prosječnu brzinu između *t*=1 *s* i *t*=1,001 *s*.

Prosječna brzina:

$$\Delta t=0{,}001\,s$$

$$\Delta x=x(1{,}001\,s)-x(1\,s)=0{,}003003001\,m$$

$$\langle v_x\rangle=\frac{\Delta x}{\Delta t}=3{,}003001\,ms^{-1}$$

Trenutna brzina:

$$v_x=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{A(t+\Delta t)^3-At^3}{\Delta t}=$$

$$=A\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{t^3+3t^2\Delta t+3t(\Delta t)^2+(\Delta t)^3-t^3}{\Delta t}=$$

$$=A\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cancel{\Delta t}(3t^2+3t\Delta t+(\Delta t)^2)}{\cancel{\Delta t}}=A\cdot\lim_{\Delta t\to 0}(3t^2+3t\Delta t+(\Delta t)^2)=$$

$$=3At^2=3{,}000000\,ms^{-1}$$

SVOJSTVA DERIVIRANJA

1.) $\frac{d}{dx}(a\cdot f(x)+b\cdot g(x))=a\cdot\frac{df(x)}{dx}+b\cdot\frac{dg(x)}{dx}$

2.) $\frac{d}{dx}f(x)\cdot g(x)=\frac{df(x)}{dx}\cdot g(x)+f(x)\cdot\frac{dg(x)}{dx}$ (Leibniz)

3.) $\frac{d}{dx}f(g(x))=\frac{df(g)}{dg}\cdot\frac{dg(x)}{dx}$

DERIVACIJE NEKIH ELEMENTARNIH FUNKCIJA

$\frac{d}{dx}x^n=n\cdot x^{n-1}$ $\frac{d}{dx}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x$

$\frac{d}{dx}\sin(x)=\cos(x)$ $\frac{d}{dx}\cos(x)=-\sin(x)$

Primjer:
Nađite x-komponentu brzine čestice kojoj x-koordinata položaja ovisi o vremenu t kao

$$x(t)=a\cdot t^3\cdot\sin(\phi+\omega\cdot t)$$

Rješenje:

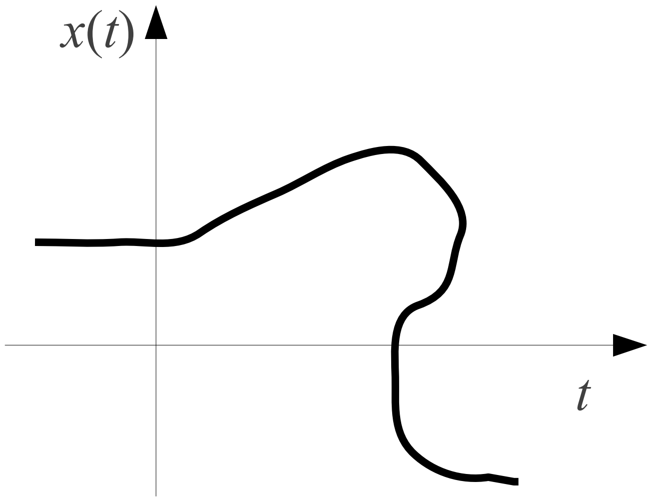
$$v_x(t)=a\cdot(3\cdot t^2)\cdot\sin(\phi+\omega\cdot t)+a\cdot t^3\cdot\omega\cdot\cos(\phi+\omega\cdot t)$$

Cijela "filozofija" matematičke operacije deriviranja počiva na intuitivnom shvaćanju kontinuuma, tj. da određenu stvar, stvarnu ili zamišljenu, možemo dijeliti ("mrviti") do beskraja tako da će nakon svakog dijeljenja opet nešto ostati od te stvari. Naprimjer, možemo pokušati zamisliti trenutak vremena koji zovemo "sada" i njemu najbliži sljedeći trenutak. Postoji li takav **najbliži sljedeći trenutak** za kojeg bismo mogli reći "između **sada** i **njemu najbližeg sljedećeg trenutka** nije bilo vremena? Vjerojatno će svatko na to pitanje odgovoriti na sljedeći način: "Kad ne bi bilo vremena onda ne bi bilo ni trenutka".
Na sličan način možemo razmišljati o povlačenju pravca kroz dvije točke. Znamo da su samo dvije točke dovoljne da bismo odredili jednadžbu pravca. Možemo se zapitati, koliko te dvije točke mogu biti blizu jedna drugoj, a da ih još uvijek razlikujemo. Odgovor na to pitanje je da takva najmanja udaljenost između dviju točaka ne postoji—ma kako malu udaljenost uzeli uvijek postoji još manja. Dakle, postoji vremenski i prostorni kontinuum. To nas potiče da definiramo posebnu matematičku veličinu, koja se zove **infinitezimalni element,** kao **po volji malu veličinu po apsolutnom iznosu, koja je različita od nule.** Tu infinitezimalnost naznačujemo slovom *d* ispred samo veličine. Tako imamo infinitezimalni pomak $d\vec{r}$, infinitezimalni vremenski interval *dt,* infitezimalni element volumena *dV,* itd. Bitno je primijetiti da omjer dviju infinitezimalnih veličina ne smijemo shvatiti kao običan omjer, jednostavno zato što ni brojnik niti nazivnik nisu određeni—oni su samo po volji mali, ali nisu 0. Iz toga slijedi da definicija trenutne brzine

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

nije običan razlomak nego je posebna matematička operacija.

Pitanje: Zašto krivulja prikazana na slici ne može opisivati gibanje materijalne čestice?



JEDNOLIKO GIBANJE PO PRAVCU

To je gibanje s **konstantnom brzinom.** Jednadžbu toga gibanja možemo izraziti kao

$$\vec{v}(t)=\vec{v}(t_0)\equiv\vec{v}_0$$

Za vektor položaja tada vrijedi:

$$d\vec{r}(t)=\vec{v}_0\,dt$$

No, ovo nije obična jednadžba, nego je to jednadžba koja povezuje infinitezimalne veličine, diferencijale. To je **diferencijalna jednadžba.**

Kako dobiti $\vec{r}(t)$, ako znamo $d\vec{r}(t)$?

Pogledajte prvu jednadžbu na stranici 3. Ona kaže da je zbroj svih pomaka između početnog trenutka t_1 i krajnjeg trenutka t_N jednaka razlici krajnjeg i početnog položaja. No, mi ovdje zbrajamo **po volji male pomake, diferencijale položaja.** Da bismo dobili nešto konačno od nečeg beskonačno malog (ali koje nije 0!), moramo tih beskonačno malih veličina imati beskonačno mnogo.
Takav izraz, beskonačno mnogo beskonačno malih veličina, se simbolički može napisati kao neodređeni izraz $0\cdot\infty$.

S takvim izrazom moramo postupati na sličan način na koji smo došli do pojma derivacije. Intuitivno shvaćamo da će spomenuti postupak biti obrnuti postupak deriviranja.
To se zove **integriranje,** i označava se simbolom

$$\int \square$$

Ako krajnji trenutak t_N jednostavno označimo kao *t,* a početni trenutak t_1 preimenujemo u t_0 , onda obje strane jednadžbe možemo integrirati od t_0 do po volji odabranog trenutka *t.* To se zove **određeni integral.** Dakle,

$$\int_{t_0}^{t} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}_0\, dt$$

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \vec{v}_0 \cdot (t - t_0)$$

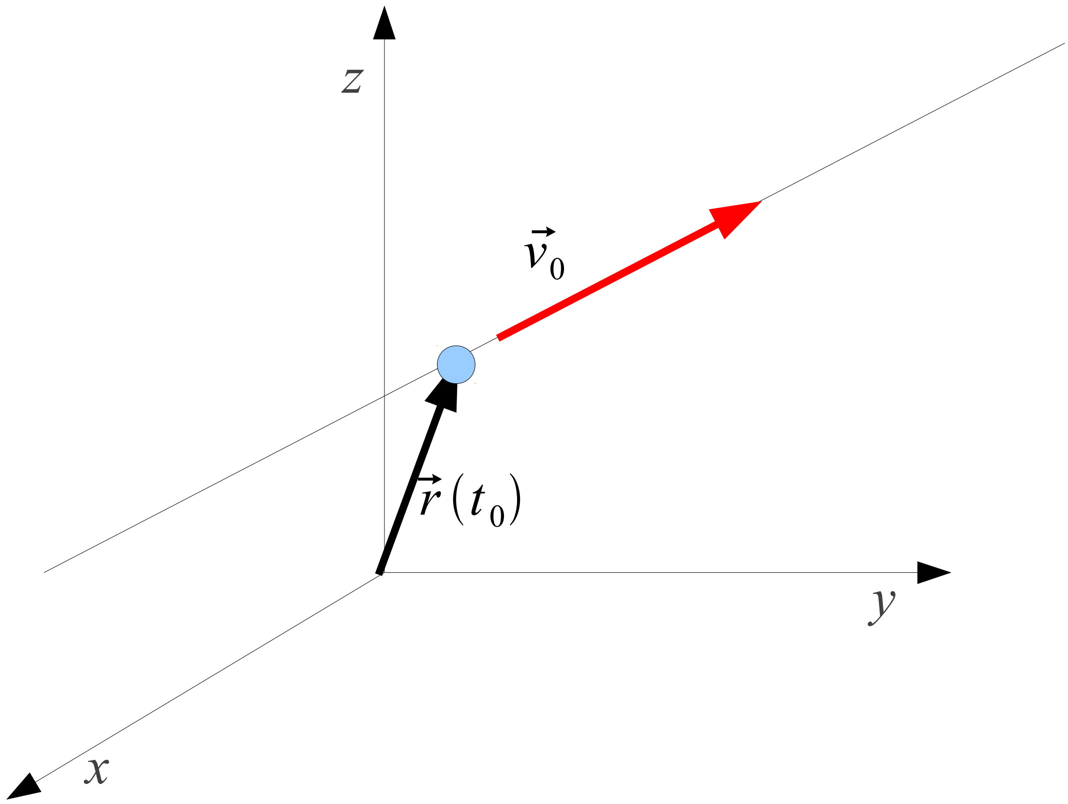
Prethodni izraz smo mogli jednostavno integrirati zato što vektor $\vec{v}_0$, dakle vektor brzine, ne ovisi o vremenu, pa ga smijemo izlučiti ispred znaka integriranja. Nakon tog izlučivanja nam ostaje određeni integral

$$\int_{t_0}^{t} dt = t - t_0$$

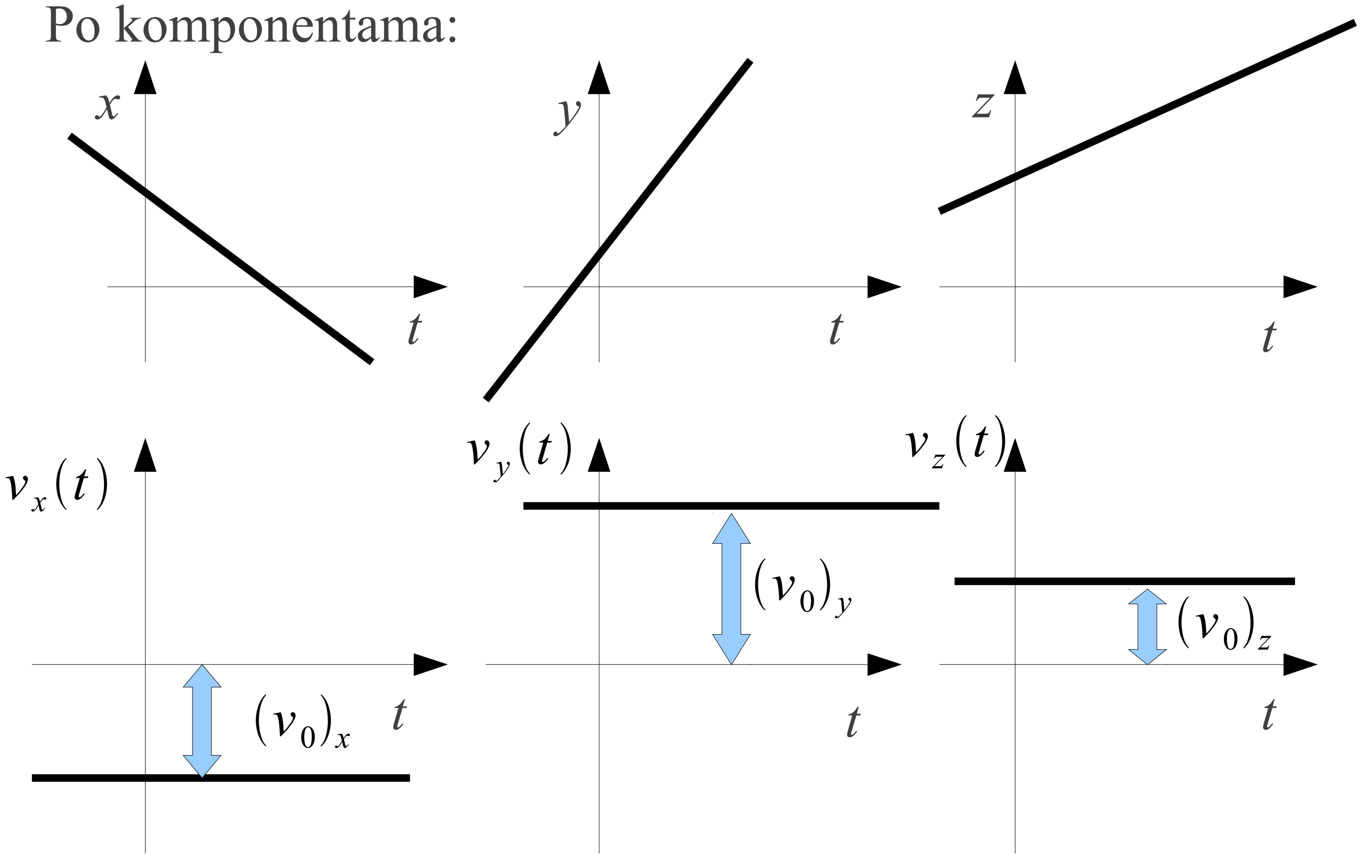
Dakle, jednoliko gibanje po pravcu (kako znamo da je pravac?) opisano je jednadžbom

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}_0 \cdot (t - t_0)$$

Grafički prikaz jednolikog gibanja po pravcu



Po komponentama:



Ukupni prijeđeni put se dobije na sličan način kao i ukupni pomak. Naime

$$ds = |d\vec{r}| = |\vec{v}_0|\,dt \Rightarrow s = |\vec{v}_0|(t - t_0)$$

Ovdje smo uzeli u obzir činjenicu da je ukupni prijeđeni put u početnom trenutku jednak 0.
Vidimo da je s jednak iznosu ukupnog pomaka. Budući da je iznos brzine konstantan, i ako izaberemo $t_0 = 0$, dobit ćemo izraz

$$v = \frac{s}{t} \quad , \quad v = |\vec{v}_0|$$

Ovo je **jedini** slučaj kada vrijedi ova jednostavna veza između prijeđenog puta, brzine i vremena. Jedinstvenost se toga očituje u **nepromjenjivosti iznosa brzine.**

Budući da je brzina vektorska veličina, ona se može mijenjati tako da joj iznos bude stalno jedan te isti. To znači da se brzina može mijenjati samo po smjeru i orijentaciji. Tada za **iznos brzine** v i prijeđeni put s u vremenu t vrijedi jednostavan odnos $v=s/t$, ma kakav bio oblik puta. Ako je put dio pravca, onda odnos $v=s/t$ kaže da je brzina stalna **i po iznosu i po smjeru.**

Pitanje:
Možete li navesti primjer gibanja u kojem se brzina mijenja samo po smjeru?

Odgovor:
Gibanje kazaljke sata.