UBRZANJE

Promjena brzine daje ubrzanje, na sličan način kako promjena položaja daje brzinu.
Brzina je vektor i kad govorimo o promjeni brzine onda mislimo na promjenu bilo koje značajke toga vektora, ili svih značajki istodobno. Brzina se može mijenjati po iznosu, a zadržavati isti smjer i orijentaciju; može se mijenjati po smjeru a zadržavati stalni iznos, itd. U svakoj navedenoj mogućnosti imamo ubrzanje.

Definiramo **prosječno ubrzanje**

$$\langle \vec{a}(t,\Delta t)\rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

Moramo poznavati **trenutne** brzine---početnu i krajnju.
Trenutno ubrzanje definiramo na sličan način kao i trenutnu brzinu—operacijom deriviranja po vremenu.
Trenutno ubrzanje je derivacija trenutne brzine po vremenu odnosno druga derivacija vektora položaja po vremenu.

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \vec{a}(t,\Delta t)\rangle = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

Poznavanjem samo trenutne brzine u određenom trenutku, ne možemo ništa reći o ubrzanju, slično kako što poznavanjem trenutnog položaja u jednom trenutku ne možemo ništa reći o brzini.

Geometrijski značaj ubrzanja vidimo iz same definicije-- dvije brzine, u dva beskonačno bliska trenutka, daju dvije tangente na krivulju gibanja. Dvije tangente, u dvjema bliskim točkama na krivulji, daju stanovitu mjeru **zakrivljenosti** krivulje gibanja. No, krivulja gibanja može biti pravac, koji nema nikakve zakrivljenosti, a da opet imamo ubrzanje. Naime, brzina se može mijenjati po iznosu i orijentaciji, a da joj smjer ostaje jedan te isti. I u takvom slučaju imamo ubrzanje, premda je krivulja gibanja—pravac.

Jednoliko ubrzano gibanje

Jednadžba je toga gibanja

$$\vec{a}(t)=\vec{a}(t_0)\equiv\vec{a}_0$$

Integrirajući ovu jednadžbu, dobivamo brzinu:

$$\vec{v}(t)=\vec{v}(t_0)+\vec{a}_0\cdot(t-t_0)=\vec{v}_0+\vec{a}_0\cdot(t-t_0)$$

Jednoliko je ubrzano gibanje **ravninsko u općem slučaju, i po pravcu u posebnom slučaju.**

Kako to znamo?

Napravimo **vektorski umnožak** brzine i ubrzanja:

$$\vec{v}(t)\times\vec{a}(t)=\left[\vec{v}_0+\vec{a}_0\cdot(t-t_0)\right]\times\vec{a}_0=\vec{v}_0\times\vec{a}_0$$

Dobili smo rezultat da se vektorski umnožak brzine i ubrzanja pri jednoliko ubrzanom gibanju **ne mijenja**. Budući da je vektorski umnožak dvaju vektora okomit na **ravninu** što ju određuju vektori koje množimo, slijedi da nezavisnost vektorskog umnoška o vremenu znači nezavisnost ravnine o vremenu, tj. ravnina je stalna, tj. gibanje je ravninsko.

U posebnom slučaju, kada su početna brzina $\vec{v}_0$ i ubrzanje $\vec{a}_0$ na istom pravcu, (ne moraju biti iste orijentacije!) nemamo definiranu ravninu, nego imamo određen pravac, po kojem se onda odvija ubrzano gibanje.

Dakle:
Jednoliko ubrzano gibanje ne mora biti po pravcu, ali može biti po pravcu. Ako nije po pravcu, onda je sigurno ravninsko.

Integrirajući brzinu po vremenu, dobivamo ovisnost vektora položaja o vremenu:

$$\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\vec{v}(t)\,dt=\vec{r}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\left[\vec{v}_0+\vec{a}_0\cdot(t-t_0)\right]dt=$$
$$=\vec{r}_0+\vec{v}_0\cdot(t-t_0)+\frac{1}{2}\vec{a}_0\left(t-t_0\right)^2$$

Budući da je ubrzanje, pri jednoliko ubrzanom gibanju, konstantni vektor, za opis je toga gibanja pogodno jednu os koordinatnog sustava postaviti u smjeru ubrzanja. Nazovimo tu os *y*.
Budući da je gibanje ravninsko (a posebno može biti i po pravcu), dovoljno nam je uzeti još samo jednu koordinatnu os, okomitu na os *y*. Tu drugu os nazovimo *x*.

Možemo još os *x* zvati vodoravnom, a os *y* vertikalnom.

Jednadžbe gibanja po komponentama, po tim dvjema osima, su:

$$x(t)=x_0+v_{0x}\cdot(t-t_0)$$ (u smjeru ove osi nema ubrzanja)

$$y(t)=y_0+v_{0y}\cdot(t-t_0)+\frac{1}{2}a_0\cdot\left(t-t_0\right)^2$$

gdje su x_0 , y_0 koordinate početnog položaja, a v_{0x} , v_{0y} komponente početne brzine u smjeru vodoravne odnosno vertikalne osi. Ubrzanje a_0 može biti i pozitivno, i negativno, ovisno o orijentaciji ubrzanja po vertikalnoj osi.

POSEBNI SLUČAJEVI

a) **Slobodni pad**

U blizini Zemljine površine sva se tijela gibaju jednoliko ubrzano prema središtu Zemlje. To ubrzanje iznosi .
$g = 9{,}81\, m\, s^{-2}$.

Ako vertikalnu os orijentiramo "prema gore", tj. od središta Zemlje prema van, onda to ubrzanje ima negativnu orijentaciju. Dakle,

$$a_0 \equiv -g = -9{,}81\, m\, s^{-2}$$

Slobodni je pad gibanje po vertikalnoj osi, **s početnom brzinom 0**. Ako početni položaj na *y* osi nazovemo visinom *h* iznad Zemljine površine, i ako za početni trenutak izaberemo $t_0 = 0\, s$, onda je jednadžba toga gibanja:

$$y(t) = h - \frac{1}{2} g\, t^2$$

Vrijeme je slobodnog pada onaj trenutak kada je *y*=0, tj:

$$t_{pada} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

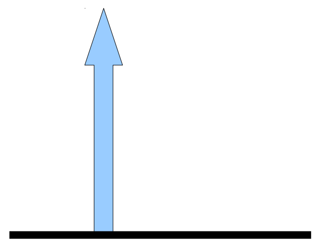
Brzina pri dodiru s tlom, tj. iznos brzine:

$$v_{tlo} = g \cdot t_{pada} = \sqrt{2hg}$$

b) **Vertikalni hitac prema gore, odnosno prema dolje**

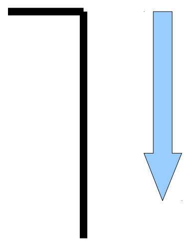
To je vertikalno gibanje s početnom brzinom prema gore, ili prema dolje. Recimo, bacamo neko tijelo uvis s početnom brzinom v_0. Jednadžba je toga gibanja:

$$y(t)=h+v_0\cdot t-\frac{1}{2}g\cdot t^2$$



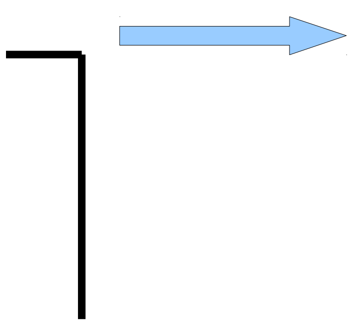
Pri tome početna visina *h* može biti 0.
Za vertikalni hitac prema dolje moramo imati neku početnu visinu $h>0$. Početna brzina je negativna, pa je jednadžba gibanja

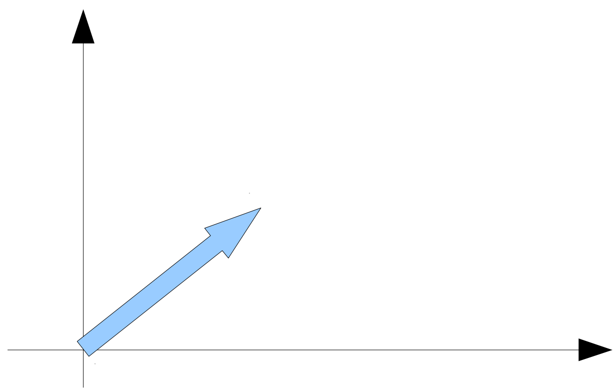
$$y(t)=h-v_0\cdot t-\frac{1}{2}g\cdot t^2$$



Opći slučaj—kosi hitac

Početna brzina materijalne točke ima i vodoravnu i vertikalnu komponentu. Ako je vertikalna komponenta početne brzine jednaka 0, onda govorimo o vodoravnom hitcu, s neke visine *h*.





Kosi je hitac, dakle, složeno gibanje:
u vodoravnom smjeru je jednoliko, a u okomitom je smjeru jednoliko ubrzano. Gibanja su po tim dvama smjerovima **nezavisna jedno od drugoga.**

Ta je nezavisnost dvaju gibanja idealizirani slučaj. Zbog otpora zraka u Zemljinoj atmosferi, nikada nemamo slučaj savršeno jednoliko ubrzanog gibanja.

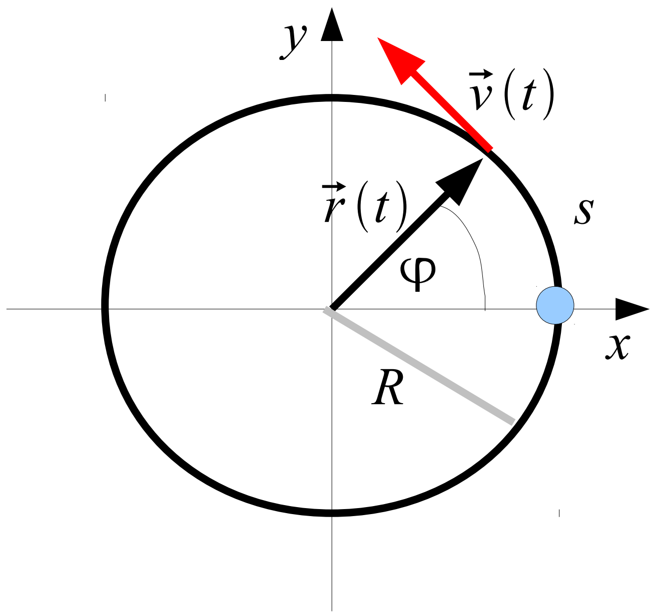
Pitanje:
Koja je životno važna situacija u kojoj se izričito traži, i nalazi, **zavisnost** vodoravnog i vertikalnog gibanja?

Slobodni pad, vertikalni hitac prema gore/dolje, vodoravni hitac i kosi hitac tek su primjeri jednoliko ubrzanog gibanja.

Iste bi jednadžbe vrijedile i za gibanje elektrona ili protona u homogenom električnom polju.

KRUŽNO GIBANJE

Kružno gibanje je gibanje po kružnici. Dakle, zadali smo krivulju gibanja. Ta je krivulja ravninska.



Kut φ definiramo kao omjer duljine luka *s* i polumjera kružnice *R*:

$$\varphi=\frac{s}{R}$$

Kut je obični broj. Puni kut iznosi 2π. Međutim, iz povijesnih razloga, a i zato da se naglasi da dotični broj predstavlja kut, rabi se izraz *radijan.*
Tako se može reći da ispruženi kut iznosi π radijana.
Rabi se i drugačija skala za kuteve---stupnjevi.
Naprimjer, $60^o=\frac{\pi}{3}radijana$.

Iz slike je jasno što će biti x i y komponenta vektora položaja. To je zapravo definicija trigonometrijskih funkcija sinus i kosinus:

$$x = R\cos\varphi \quad , \quad y = R\sin\varphi$$

Kružno se gibanje sastoji samo u tome da je kut φ određena funkcija vremena t. Imamo pozitivni i negativni smisao vrtnje. Na slici je prikazan pozitivni smisao.

Komponente brzine su:

$$v_x = -R\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi \quad , \quad v_y = R\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi$$

Uvodimo pojam **kutne brzine**

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

i **kutnog ubrzanja**

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Naprimjer, kutna brzina $\omega = \pi\, rad \cdot s^{-1}$ zapravo znači pola okretaja u sekundi, ili 30 okretaja u minuti.

Komponente vektora ubrzanja su derivacije po vremenu pripadajućih komponenata brzine:

$$a_x = -R\omega^2 \cos\phi - R\alpha \sin\phi \quad , \quad a_y = -R\omega^2 \sin\phi + R\alpha \cos\phi$$

Dakle, vektori su:

$$\vec{r} = R\left(\vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi\right)$$
$$\vec{v} = R\omega\left(-\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi\right)$$
$$\vec{a} = -R\omega^2\left(\vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi\right) + R\alpha\left(-\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi\right)$$

Očite činjenice ovoga gibanja su:

1.) vektor brzine je u svakoj točci okomit na vektor položaja (Talesov poučak)

2.) vektor se ubrzanja sastoji od dvije međusobno okomite komponente

a) centripetalnog ubrzanja

$$\vec{a}_c = -\omega^2 \cdot \vec{r}$$

b) tangencijalnog ubrzanja

$$\vec{a}_t = \frac{\alpha}{\omega}\vec{v}$$

tako da vrijedi:

$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t$$

Jednoliko kružno gibanje je gibanje s **konstantnom kutnom brzinom.** To je periodičko gibanje, s periodom T

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Kod takvog gibanja tangencijalno ubrzanje jednako je 0, ali centripetalno ubrzanje nije jednako 0.
Centripetalno ubrzanje postoji pri svakoj vrsti kružnog gibanja.
Iznos vektora brzine pri tom gibanju se ne mijenja, ali se mijenja smjer vektora brzine, te samo zbog promjene smjera nastaje ubrzanje—centripetalno ubrzanje.

Jednoliko ubrzano kružno gibanje je gibanje s **konstantnim kutnim ubrzanjem.** To je najjednostavnije gibanje pri kojem postoji tangencijalno ubrzanje. Pri tom se gibanju mijenja i smjer i iznos brzine, pri čemu se iznos brzine mijenja samo zbog tangencijalnog ubrzanja.

Kutna brzina, i kutno ubrzanje, mogu se shvatiti kao vektori. Kutna brzina ima smjer okomit na ravninu kružnice, i orijentirana je po pravilu desne ruke, tako da vrijedi:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Vektor kutnog ubrzanja je jednostavno derivacija vektora kutne brzine. Ako se ravnina kružnice ne zakreće, onda taj vektor ima isti smjer kao i vektor kutne brzine.
Ništa se ne kreće u smjeru vektora kutne brzine, nego oko njega. Kutna brzina nije tangenta ni na kakvu krivulju gibanja.

Zadatak:

Materijalna se točka iz stanja mirovanja počinje vrtjeti po kružnici polumjera r=10 *cm* sa stalnim tangencijalnim ubrzanjem a_t=0,1 ms^{-2}. U kojem će trenutku centripetalno ubrzanje biti po iznosu jednako tangencijalnom ubrzanju?

Rješenje:

Moramo izračunati kutno ubrzanje:

$$\alpha=\frac{a_t}{r}=1\,s^{-2}$$

iz čega dobivamo ovisnost kutne brzine o vremenu:

$$\omega(t)=\omega(0)+\alpha t=t/s^{-2}$$

i iznosa centripetalnog ubrzanja:

$$a_c=\omega(t)^2 r=0{,}1\,t^2\,m/s^{-4}$$

Iz uvjeta $a_c=a_t$ dobivamo:

$$0{,}1\,t^2\,m/s^{-4}=0{,}1\,m/s^{-2}\rightarrow t^2=1\,s^2\rightarrow t=1\,s$$