RAD I ENERGIJA

U svakodnevnu govoru često se čuje rečenica:"da bih obavio taj rad, treba mi energija" ili "iscrpljen sam, nemam dovoljno energije za taj rad" ili "nemam energije za učiti se fiziku" (to je najčešće laž) itd. itd.
Očito su i rad i energija, kao i sila, pojmovi povezani s iskustvom. Teret koji ne možemo podići, često ga možemo pogurnuti po ravnoj i dovoljno glatkoj površini. Zašto?
Zato što spomenuto guranje znači pomak **okomit na silu** koju ne možemo vlastitim snagama nadjačati, naime težinu tereta. Ako je pak **sila trenja**, koja djeluje na **istom pravcu** kao i sila guranja, prevelika, ne ćemo teret moći ni pogurnuti.
Intuitivno je jasno da uloženi rad i trud ovisi o odnosu sile i pomaka kao dviju vektorskih veličina. Kakav je to odnos između dvaju vektora, koji nam daje 0 ako su vektori okomiti, i koji nam daje (ili uzima) najviše kad su vektori na istom pravcu?
Riječ je o **skalarnom umnošku.** Definiramo **mehanički rad** kao skalarni umnožak sile i pomaka:

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} \quad , \quad dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Ova veličina, ΔW ili dW , može biti pozitivna, negativna ili 0. Naprimjer, kada podižemo teret gravitacijska sila, tj. težina tereta, vrši negativan rad jer je pomak suprotne orijentacije od težine. Isto tako, sila trenja koja se javlja pri guranju tereta po vodoravnoj podlozi vrši negativan rad. S točke gledišta čovjeka (ili stroja) koji podiže ili gura teret, njegov rad je pozitivan jer se teret pomiče u smjeru sile koju je primijenio.

Čini se kao da je ukupni rad jednak 0. Idemo vidjeli je li to istina.
Da bismo pomaknuli teret u bilo kojem od navedenih primjera, moramo ga ubrzati. Ma koliko malo to ubrzanje bilo, ono mora postojati da bi teret iz stanja mirovanja došao u stanje gibanja. Po drugom Newtonovom zakonu, ukupna sila mora biti jednaka umnošku mase i ubrzanja. Znači da u slučaju podizanja tereta moramo težinu tereta nadjačati za određeni iznos kao i silu trenja u slučaju guranja tereta po vodoravnoj podlozi. Budući da ukupna sila može ovisiti o položaju materijalne točke, ukupni rad na konačnu putu dobivamo integriranjem od početnog do konačnog položaja **po određenom putu**

$$W_{AB}=\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B}\vec{F}\cdot d\vec{r}=m\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B}\vec{a}\cdot d\vec{r}=m\int_{t_A}^{t_B}\vec{a}\cdot\vec{v}\,dt=m\int_{t_A}^{t_B}\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\,dt=$$

$$=m\int_{\vec{v}_A}^{\vec{v}_B}\vec{v}\cdot d\vec{v}=m\int_{\vec{v}_A}^{\vec{v}_B}d\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right)=\frac{m\vec{v}_B^{\,2}}{2}-\frac{m\vec{v}_A^{\,2}}{2}=E_{kinB}-E_{kinA}$$

Ukupni rad jednak je razlici krajnje i početne kinetičke energije. Taj je zaključak neovisan o obliku puta i njegovu vremenu trajanja. **To je jedan od osnovnih teorema klasične mehanike.** Drugi Newtonov zakon povezuje rad i kinetičku energiju. Teorem o radu i energiji samo je drugačije izricanje 2. Newtonovog zakona--njegov drugačiji matematički oblik.

Dotični teorem možemo uobličiti u matematički izraz

$$\vec{F}=m\vec{a} \iff W_{AB}=E_{kinB}-E_{kinA}$$

Ovdje se je pojam kinetičke energije pojavio kao posljedica jednadžbe gibanja, tj. drugog Newtonovog zakona.

Ukupna se sila često sastoji od više različitih sila. Svaka od sila obavi svoj rad, koji može biti i 0. Naprimjer, ako se gibanje čestice odvija tako da je u svakom dijelu puta pomak okomit na određenu silu, tada ta sila ne obavlja nikakav rad. Jedna od takvih je centripetalna sila. Za razliku od nje, tangencijalna sila uvijek obavlja rad jer djeluje na smjeru pomaka čestice.

Primjer 1.:
Rad što ga obavi težina čestice pri kosom hitcu jednak je 0, ako je krajnji položaj čestice na istoj visini kao i njezin početni položaj. Zašto? To slijedi iz definicije mehaničkog rada:

$$\left(W_g\right)_{AB}=\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} m\vec{g}\cdot d\vec{r}=m\vec{g}\cdot\left(\vec{r}_B-\vec{r}_A\right)=-mg\left(h_B-h_A\right)$$

Kada bi tijekom gibanja čestice po kosom hitcu djelovala samo njezina težina i ako bi početna visina na kojoj se je nalazila čestica bila jednaka krajnjoj visini, onda bi rad težine bio jednak 0. Iz prethodnog teorema slijedi da je **iznos** krajnje brzine čestice jednak iznosu njezine početne brzine. U stvarnosti to nije tako zato što pri kosom hitcu djeluje sila otpora zraka.

Sila otpora zraka uvijek je istoga smjera kao i pomak čestice, ali je suprotne orijentacije od njega. Dakle, rad te sile bio bi uvijek negativan. To znači da bi ukupni rad—rad težine + rad sile otpora zraka---bio negativan, a to pak znači da bi iznos krajnje brzine čestice bio manji od iznosa njezine početne brzine. I to je istina—iz razlike početne i krajnje kinetičke energije čestice možemo izravno izračunati koliki je (po iznosu) rad sile otpora zraka. To je **dio informacije** o sili otpora zraka.

Primjer 2.:
Loptica mase $m = 0{,}1\ kg$ ispuštena je s visine $h = 100\ m$. Njezina brzina pri samom tlu iznosi $v = 40\ m/s$. Koliki je rad sile otpora zraka? Kolika je prosječna sila otpora zraka?
Rješenje:
Rad težine je $W_g = m\,g\,h = 98{,}1\ J$

Razlika kinetičkih energija je $E_{kinB} - E_{kinA} = \frac{m v^2}{2} - 0 = 80\ J$

$$W_{otpora} + W_g = E_{kinB} - E_{kinA} \;\Rightarrow\; W_{otpora} = 80 - 98{,}1 = -18{,}1\ J$$

Prosječnu silu otpora zraka definiramo kao omjer njezina rada i prijeđenog puta, po apsolutnom iznosu:

$$\langle F_{otpora} \rangle = \frac{|W_{otpora}|}{h} = \frac{18{,}1}{100} = 0{,}181\ N$$

Potencijalna energija

Rad konstantne sile jednak je

$$W_{AB}=\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\vec{F}\cdot\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B}d\vec{r}=\vec{F}\cdot\left(\vec{r}_B-\vec{r}_A\right)$$

Vidimo da rad konstantne sile ovisi samo o krajnjim točkama puta, a ne i o obliku puta između tih točaka.

Naprimjer, kada tijelo klizi po kosini sila trenja se može smatrati konstantnom pod određenim uvjetima---da je dodirna površina između tijela i kosine na svakom mjestu podjednake hrapavosti, da se tijelo giba pravocrtno,...

Tada za rad te sile trenja vrijedi gornji izraz. Međutim, sila trenja **bitno ovisi** o smjeru i orijentaciji brzine, a najčešće i o iznosu brzine, tako da primjenu gornje formule za rad te sile valja uzeti s krajnjim oprezom.

Ali...

Primjena gornje formule za težinu tijela **nema takvih ograničenja.** Težina, tj. gravitacijska sila privlačenja između planeta Zemlje i tijela, bitno ima to svojstvo---da rad te sile ovisi samo o skrajnjim točkama puta, ne i o obliku puta između tih točaka. Mi ovdje razmatramo težinu tijela samo u blizini Zemljine površine, gdje tu silu možemo smatrati konstantnom, ali taj zaključak vrijedi i onda kada se iznos gravitacijske sile mijenja u ovisnosti o položaju čestice. To ćemo vidjeti podrobnije u poglavlju o gravitaciji.

Potencijalna energija

Do sada smo se upoznali s kinetičkom energijom, koja nužno slijedi kao posljedica drugog Newtonovog zakona. Saberimo do sada spoznate činjenice:

1.) Ukupni rad jednak je razlici krajnje i početne kinetičke energije

2.) Rad konstantne sile jednak je razlici krajnjeg i početnog položaja, pomnoženoj sa silom kao skalarni umnožak dvaju dvaju vektora: sile i ukupnog pomaka

Što je smisleno zajedničko ovim dvjema činjenicama? Zajedničko je to da nešto ovisi o vrijednosti nečega samo u krajnjim točkama puta, ne i o obliku puta između njih. Zato definiramo **potencijalnu energiju**, kao nešto slično kinetičkoj energiji, tako da rad određene sile možemo prikazati kao razliku potencijalnih energija u krajnjim točkama. Za konstantnu silu definiramo potencijalnu energiju

$$E_{pot}(\vec{r}) = -\vec{F} \cdot \vec{r}$$

tako da rad te sile prikazujemo u obliku:

$$W_{AB} = E_{pot}(\vec{r}_A) - E_{pot}(\vec{r}_B)$$

Primijetite predznak – u izrazu za potencijalnu energiju. Zašto takav predznak? Zar ne bi bio logičniji predznak + ?
Sada ćemo vidjeti da je predznak – logičniji izbor.

Naime, ako bi na tijelo djelovale samo one sile za koje možemo definirati potencijalnu energiju na navedeni način, onda bi iz teorema o radu i energiji slijedilo:

$$W_{AB} = E_{kinB} - E_{kinA}$$

$$E_{pot}(\vec{r}_A) - E_{pot}(\vec{r}_B) = E_{kinB} - E_{kinA}$$

$$E_{kinB} + E_{pot}(\vec{r}_B) = E_{kinA} + E_{pot}(\vec{r}_A)$$

$$E_{uk}(\vec{r}_A) = E_{uk}(\vec{r}_B)$$

Dobili smo jedan jako lijepi i pamtljiv zakon: zbroj kinetičke i potencijalne energije **ne mijenja se tijekom gibanja čestice.** Ili: ukupna energija materijalne čestice ostaje stalnom tijekom gibanja čestice. To je **zakon očuvanja energije.**

Jasno, ova tvrdnja vrijedi ako na česticu djeluju samo sile za koje se može definirati potencijalna energija. Ako djeluju i sile za koje se ne može definirati potencijalna energija, kao što je to sila trenja, onda gornja tvrdnja ima oblik:
Promjena ukupne energije jednaka je radu sila za koje se ne može definirati potencijalna energija. Pod ukupnom ukupnom energijom razumijevamo zbroj kinetičke i potencijalne energije.

Potencijalna energija može biti svakojakog podrijetla: elastična, gravitacijska, električna, nuklearna, ...

Gravitacijska potencijalna energija

Budući da je težina tijela u blizini Zemljine površine konstantna, njezina potencijalna energija je već definirana kao potencijalna energija konstantne sile

$$E_g(\vec{r}) = -\vec{F}\cdot\vec{r} = -m\,\vec{g}\cdot\vec{r} = m\,g\,h$$

gdje je h koordinata na smjeru vektora $\vec{g}$ od središta Zemlje prema van, tj. to je visina iznad Zemljine površine. Prema kojoj površini na Zemlji mjerimo visinu h ? Možemo izabrati bilo koju jer dodavanje konstante potencijalnoj energiji ne mijenja ništa bitno u zakonu očuvanja energije. Dakle, u primjeni zakona očuvanja energije, gdje imamo posla s gravitacijskom energijom, visinu možemo mjeriti u odnosu na bilo koju razinu Zemljine površine. Jasno, tada sve visine koje imamo u dotičnom problemu moramo mjeriti u odnosu na jednu te istu razinu.

Konzervativne i nekonzervativne sile

Silu za koju možemo definirati potencijalnu energiju zvat ćemo konzervativnom silom. Sve fundamentalne sile su takve, naime konzervativne. Sile za koje ne možemo definirati potencijalnu energiju zvat ćemo rasipnim (disipativnim) silama. Takve sile se najčešće javljaju u mehanici u obliku trenja i topline.
Rad konzervativne sile **po bilo kojem zatvorenom putu**, tj. petlji, jednak je 0

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

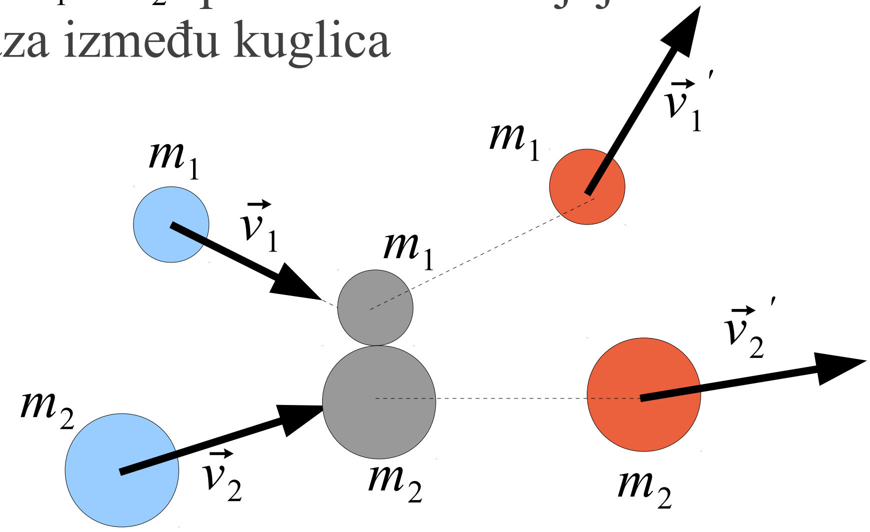
Rad rasipne sile po bilo kojem zatvorenom putu uvijek je različit od 0, odnosno manji je od 0

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = -Q < 0$$

Drugačije rečeno: rad konzervativne sile ovisi samo o početnom i konačnom stanju, a rad rasipne sile ovisi o procesu između početnog i konačnog stanja.

Srazovi

Do sada smo samo na temelju drugog i trećeg Newtonovog zakona izveli dva zakona očuvanja: zakon očuvanja ukupne količine gibanja za dvije ili više čestica kada ukupna vanjska sila iščezava ili se može zanemariti i zakon očuvanja ukupne energije, odnosno teorem o radu i energiji.
Srazovi makroskopskih tijela, poput biljarskih kuglica, ili mikroskopskih, elementarnih, čestica događaji su u kojima se očituju oba zakona.
Zamislimo dvije kuglice masa m_1 i m_2 kako se gibaju brzinama $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ prema točci u kojoj će se dodirnuti, tj. doći će do sraza između kuglica



Zakoni očuvanja su

$$\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{p}_1{}'+\vec{p}_2{}' \qquad (1)$$

$$\frac{\vec{p}_1{}^2}{2m_1}+\frac{\vec{p}_2{}^2}{2m_2}=\frac{\vec{p}_1{}'^2}{2m_1}+\frac{\vec{p}_2{}'^2}{2m_2}+Q \qquad (2)$$

Budući da je rad rasipnih sila negativan, veličina Q u zakonu očuvanja energije je pozitivna, i predstavlja toplinu oslobođenu u srazu tijela (kuglica).

Ako je veličina Q= 0, tada govorimo o potpuno elastičnom srazu. Nasuprot tomu, ako je $\vec{v}_1{}'=\vec{v}_2{}'$ tada govorimo o potpuno neelastičnom srazu. Srazovi su obično između potpuno elastičnih i potpuno neelastičnih. Kako to uzeti u obzir? Sami zakoni očuvanja nam ne daju slučajeve "između". Stupanj (ne)elestičnosti sraza moramo definirati kao dodatak zakonima očuvanja, tako da definiramo **faktor restitucije** r na sljedeći način

$$|\vec{v}_1{}'-\vec{v}_2{}'|=r|\vec{v}_1-\vec{v}_2|$$

odnosno

$$\left|\frac{\vec{p}_1{}'}{m_1}-\frac{\vec{p}_2{}'}{m_2}\right|=r\left|\frac{\vec{p}_1}{m_1}-\frac{\vec{p}_2}{m_2}\right| \qquad (3)$$

Faktor je restitucije empirijska veličina, što znači da se ne izvodi iz zakona dinamike nego se mjeri.
Rješavanje sustava jednadžbi (1), (2) i (3) može se provesti na sljedeći način:

Ako je $\vec{P}$ ukupna količina gibanja, onda možemo staviti da je

$$\vec{p}_1=\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{P}+\vec{q} \quad , \quad \vec{p}_2=\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{P}-\vec{q}$$
$$\vec{p}_1{}'=\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{P}+\vec{q}\,' \quad , \quad \vec{p}_2{}'=\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{P}-\vec{q}\,' \tag{4}$$

Tada je jednadžba (1) zadovoljena, a iz jednadžbe (3) dobivamo

$$|\vec{q}\,'|=r\,|\vec{q}| \tag{5}$$

Iz jednadžbe (2) dobivamo:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\vec{q}^{\,2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\vec{q}^{\,\prime 2}+Q \tag{6}$$

Uvrštavanjem jednadžbe (5) u jednadžbu (6) dobivamo izraz za oslobođenu toplinu Q:

$$Q=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\left(1-r^2\right)\vec{q}^{\,2} \tag{7}$$

Vektor $\vec{q}$ možemo izraziti s pomoću relativne brzine čestica prije sudara:

$$\vec{q}=\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)^{-1}\left(\vec{v}_1-\vec{v}_2\right) \tag{8}$$

Tada za oslobođenu toplinu dobivamo konačni izraz:

$$Q=\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(1-r^2\right)\left(\vec{v}_1-\vec{v}_2\right)^2$$