

Nestacionarni prijenos topline

Što je to? Vježba na kolegiju Prijenos topline (poliesterska kugla toplo/hladno)?

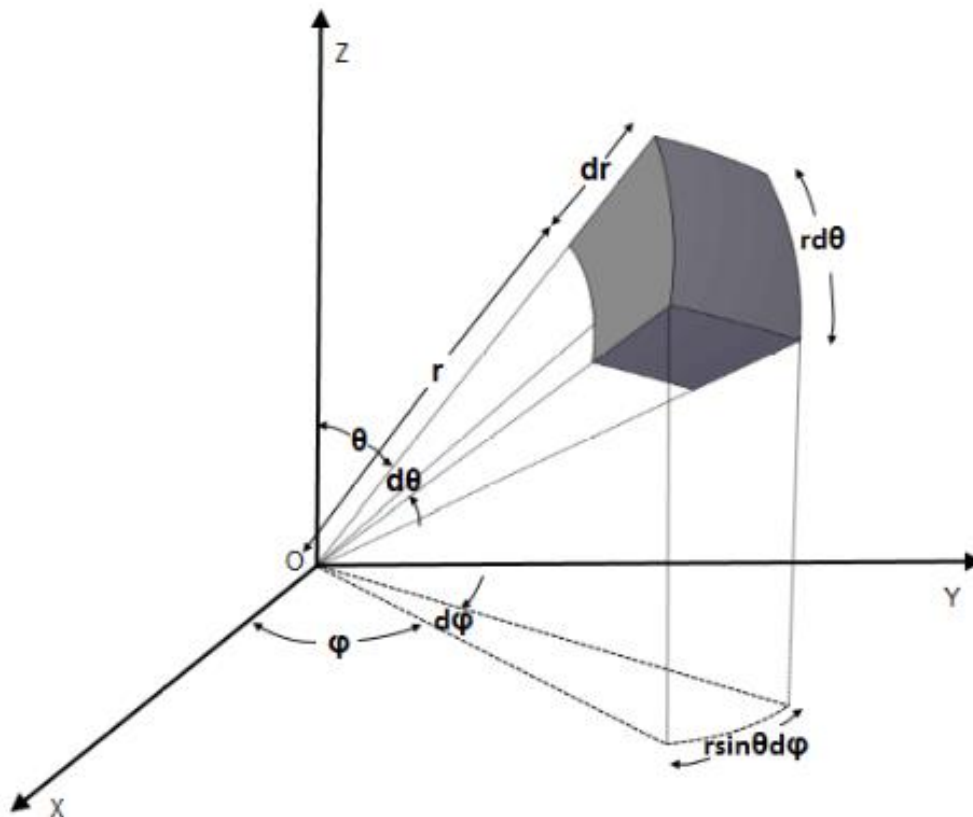
Zašto je važan u ovom kolegiju?

Proučavamo prijenos topline sa fluida na čvrste čestice, odnosno hlađenje čvrste čestice u struji fluida!

Gdje se taj "problem" javlja?

Primjerice: Zagrijavanje vapnenca u šahtnoj peći. Hlađenje pečenog (živog) vapna u šahtnoj peći. Prijenos topline vrućih dimnih plinova na sirovinu u predkalcinatoru tijekom proizvodnje portland cementa. Hlađenje cementnog klinkera u hladnjaku klinkera neposredno po izlasku iz rotacijske peći za proizvodnju cementa...

Kako opisujemo bilancu topline čvrste čestice (idealno kugle radijusa (polumjera) R)? Koristimo sferični koordinatni sustav, položaj opisujemo pomoću radijusa i dva kuta.



Općeniti oblik bilance topline infinitezimalnog volumena materijala u sferičnom koordinatnom sustavu (imajući na umu: Akumulacija = Ulaz – Izlaz + Generacija):

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot k \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (1 \cdot k \frac{\partial T}{\partial \phi}) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot k \frac{\partial T}{\partial \theta}) + \dot{e}_{gen} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

zanemari li se generacija topline, te uz konstantnu toplinsku vodljivost slijedi:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \psi^2} + \frac{\cos \varphi}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial^2 T}{\partial \psi^2} \right)$$

Pojednostavljeni oblik, ako pretpostavimo da su izotermne površine simetrične (ne ovise o kutu)!

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Da bismo riješili ovu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu, trebamo definirati početne i rubne (granične) uvjete. Naravno, potrebno je definirati i svojstva čvrstog tijela i koeficijent prijelaza topline na granici fluid/čvrsto tijelo.

Početni uvjet: za $t=0$ $T=T_0=\text{konst.}$

Konvektivni prijenos topline sa fluida na krutinu definira se kao granični uvjet treće vrste.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} = -\frac{h}{\lambda} (T_0 - T_f)$$

nakon dosta matematičkih transformacija, slijedi da je bezdimenzionalna temperatura na radijusu r , u vremenu t jednaka:

$$\frac{\theta}{\theta_{max}} = \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} = \sum_1^{\infty} 2 \frac{\sin \mu_k - \mu_k \cos \mu_k}{\mu_k - \sin \mu_k \cos \mu_k} e^{-\mu_k^2 \alpha t / R^2} \frac{\sin \mu_k \frac{r}{R}}{\mu_k \frac{r}{R}}$$

u centru ($r=0$), u vremenu t , gornja se jednadžba pojednostavljuje:

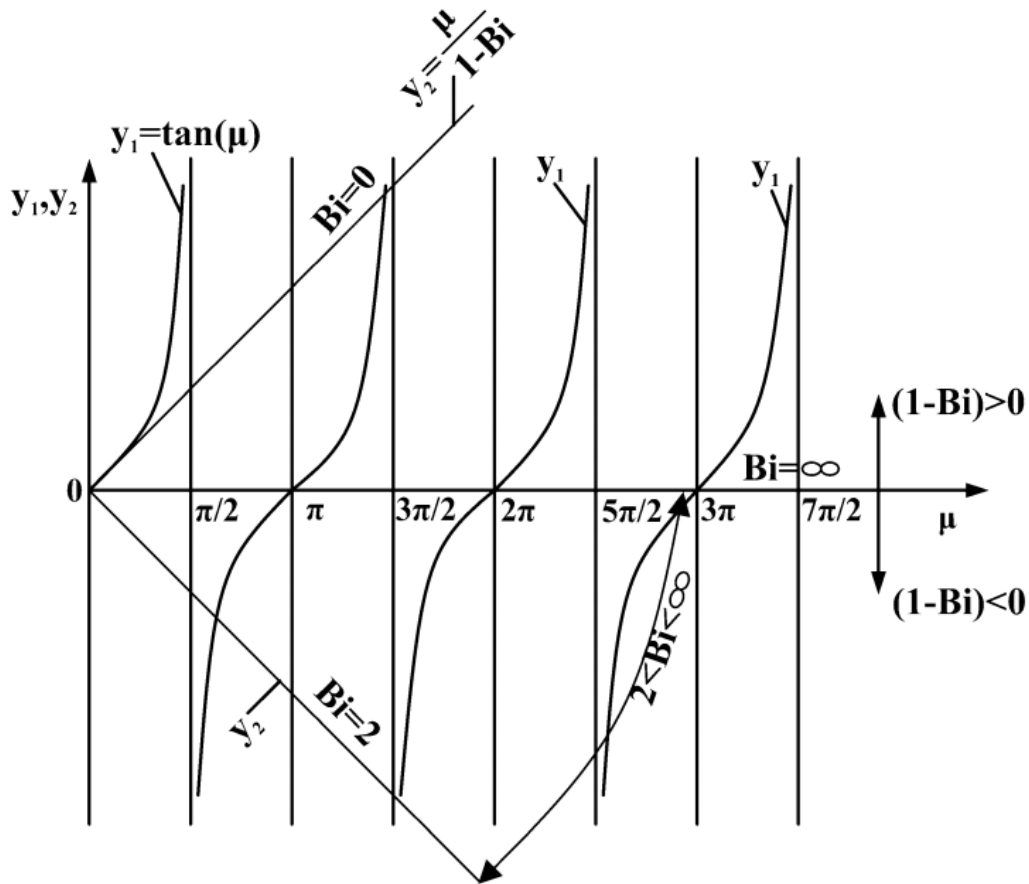
$$\frac{\theta}{\theta_{max}} = \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} = \sum_1^{\infty} 2 \frac{\sin \mu_k - \mu_k \cos \mu_k}{\mu_k - \sin \mu_k \cos \mu_k} e^{-\mu_k^2 \alpha t / R^2}$$

koeficijent μ_n rješenje je nelinearne jednadžbe:

$$tg \mu_k = \frac{\mu_k}{1 - Bi}$$

Ova jednadžba ima beskonačan broj rješenja, ali je zbog eksponencijalnog faktora obično dovoljno svega nekoliko prvih članova (nekoliko prvih (pozitivnih, tj. većih od nule)) korijena ove jednadžbe.

Na sljedećoj slici prikazano je grafičko rješavanje navedene jednadžbe.



U sljedećoj tablici dane su vrijednosti prvih šest korijena ove jednačbe za određenu vrijednost Biotove značajke (definirane za kuglu):

$$Bi = \frac{hR}{\lambda}$$

gdje je: h – koeficijent prijelaza topline na granici fluid/krutina / $\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$

R – polumjer kugle / m

λ – toplinska vodljivost krutine / $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$

Možemo definirati i vrijednost Fourierove značajke:

$$Fo = \frac{at}{R^2}$$

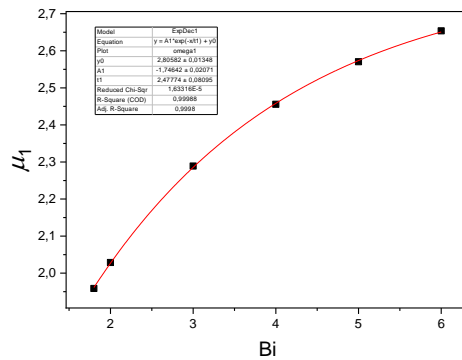
gdje je: a – temperaturna difuzivnost krutine / m^2s^{-1}

t – vrijeme / s

R – polumjer kugle / m

<i>Bi</i>	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
0	0,000	4,4934	7,7253	10,9041	14,0662	17,2208
0,005	0,1224	4,4945	7,7259	10,9046	14,0666	17,2210
0,01	0,1730	4,4956	7,7265	10,9050	14,0669	17,2213
0,02	0,2445	4,4979	7,7278	10,9060	14,0676	17,2219
0,03	0,2991	4,5001	7,7291	10,9069	14,0683	17,2225
0,04	0,3450	4,5023	7,7304	10,9078	14,0690	17,2231
0,05	0,3854	4,5045	7,7317	10,9087	14,0697	17,2237
0,06	0,4217	4,5068	7,7330	10,9096	14,0705	17,2242
0,07	0,4551	4,5090	7,7343	10,9105	14,0712	17,2248
0,08	0,4860	4,5112	7,7356	10,9115	14,0719	17,2254
0,09	0,5150	4,5134	7,7369	10,9124	14,0726	17,2260
0,10	0,5423	4,5157	7,7382	10,9133	14,0733	17,2266
0,15	0,6609	4,5268	7,7447	10,9179	14,0769	17,2295
0,20	0,7593	4,5379	7,7511	10,9225	14,0804	17,2324
0,30	0,9208	4,5601	7,7641	10,9316	14,0875	17,2382
0,40	1,0528	4,5822	7,7770	10,9408	14,0946	17,2440
0,50	1,1656	4,6042	7,7899	10,9499	14,1017	17,2498
0,60	1,2644	4,6261	7,8028	10,9591	14,1088	17,2526
0,70	1,3525	4,6479	7,8156	10,9682	14,1159	17,2614
0,80	1,4320	4,6696	7,8284	10,9774	14,1230	17,2672
0,90	1,5044	4,6911	7,8412	10,9865	14,1301	17,2730
1,00	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372	17,2788
1,20	1,6887	4,7544	7,8794	11,0137	14,1513	17,2903
1,40	1,7906	4,7956	7,9046	11,0318	14,1654	17,3019
1,60	1,8798	4,8358	7,9295	11,0498	14,1795	17,3134
1,80	1,9586	4,8751	7,9542	11,0677	14,1935	17,3249
2,0	2,0288	4,9132	7,9787	11,0856	14,2075	17,3364
3,0	2,2889	5,0870	8,0962	11,1727	14,2764	17,3932
4,0	2,4557	5,2329	8,2045	11,2560	14,3434	17,4490
5,0	2,5704	2,3540	8,3029	11,3349	14,4048	17,5034
6,0	2,6537	5,4544	8,3914	11,4086	14,4699	17,5562
7,0	2,7165	5,5378	8,4703	11,4773	14,5288	17,6072
8,0	2,7654	5,6078	8,5406	11,5408	14,5847	17,6567
9,0	2,8044	5,6669	8,6031	11,5994	14,6374	17,7032
10	2,8363	5,7172	8,6587	11,6532	14,6870	17,7481
11	2,8628	5,7606	8,7083	11,7027	14,7335	17,7908
16	2,9476	5,9080	8,8898	11,8959	14,9251	17,9742
21	2,9930	5,9921	9,0019	12,0250	15,0625	18,1136
31	3,0406	6,0831	9,1294	12,1807	15,2380	18,3018
41	3,0651	6,1311	9,1987	12,2688	15,3417	18,4180
51	3,0801	6,1606	9,2420	12,3247	15,4090	18,4953
61	3,0901	6,1805	9,2715	12,3632	15,4559	18,5497
81	3,1028	6,2058	9,3089	12,4124	15,5164	18,6209
101	3,1105	6,2211	9,3317	12,4426	15,5537	18,6650
∞	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496

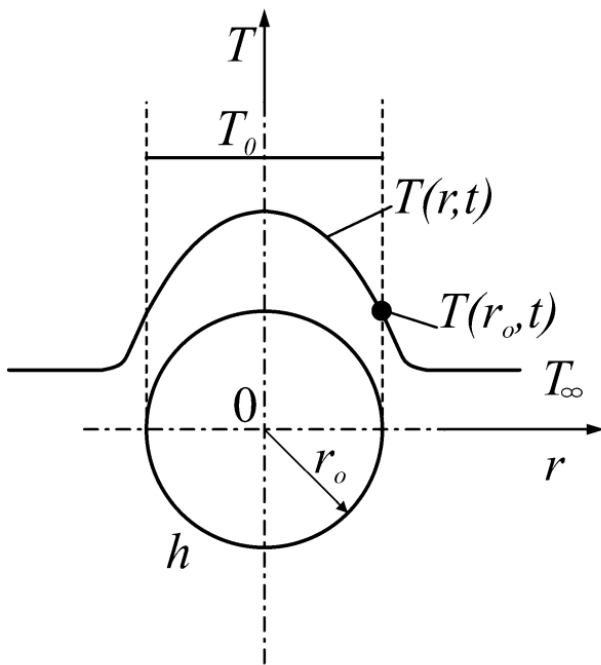
Na sljedećoj slici prikazana je ovisnost vrijednosti prvog korijena karakteristične jednačbe o Biotovoj značajci.



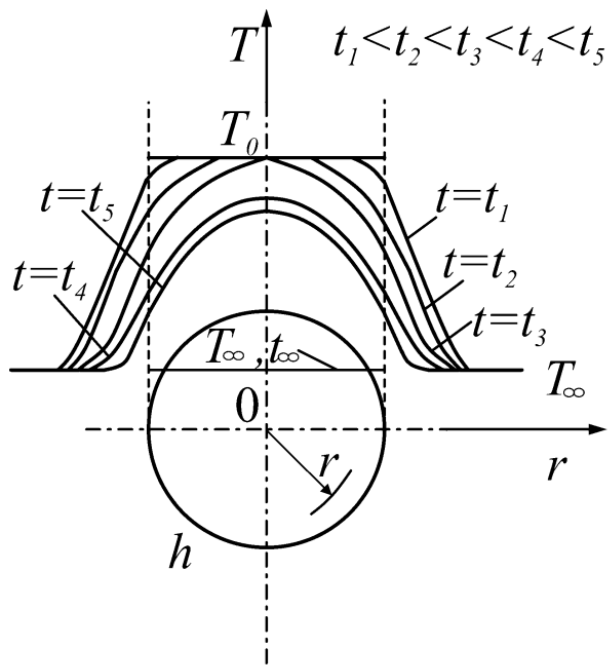
Vrijednost korijena jednačbe moguće je naći linearnom interpolacijom prema priloženoj tablici ili malo točnije – (nelinearnom) interpolacijom vrijednosti u tablici (gornja slika).

Također, uporabom običnog kalkulatora moguće je u par minuta doći do vrlo točne vrijednosti korijena, koristeći naravno vrijednosti iz tablice kao prvu aproksimaciju. Potrebno je naći i vrijednost sljedećeg korijena jednačbe, kako bi se uvjerali da li je taj član „važan“, ili ga je moguće zanemariti.

Kako uopće izgleda profil temperature vruće kugle (početne temperature T_0) čvrstog materijala koja se hladi u struji zraka temperature $T_{fluida} = T_\infty$?



Transient Heat Conduction in Sphere, Fig. 1 Cooling of the sphere which temperature changes from the initial temperature T_0 to the ambient temperature T_∞



Transient Heat Conduction in Sphere, Fig. 2 Transient temperature profiles for a sphere – convection boundary conditions

Riješimo sljedeći zadatak:

Metalna kuglica radijusa 20 mm i početne temperature 800 °C, hladi se strujom zraka temperature 42 °C. Poznata je toplinska vodljivost metala od 46 Wm⁻¹K⁻¹ i toplinska difuzivnost od 1*10⁻⁵ m²s⁻¹. Koeficijent prijelaza topline iznosi 400 Wm⁻²K⁻¹. Kolika je temperatura površine kuglice i središta kuglice nakon 100 sekundi?

Poznato je: $R = 20 \text{ mm} = 0.02 \text{ m}$ $T_0 = 800 \text{ °C}$ $T_{\text{fluida}} = 42 \text{ °C}$
 $\lambda = 46 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ $\alpha = 1 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ $h = 400 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$

$Bi = (hR)/\lambda = 400 \cdot 0.02 / 46 = 0.1739$ Vrijednost Bi značajke je veća od 0.1 te nije moguće primijeniti aproksimaciju s usredotočenim parametrima (ako želimo malu pogrešku!). Vrijednost nultočke karakteristične jednačbe je:

$\mu_1 = 0.70989590$ $\mu_2 = 4.53209339$ $\mu_3 = 7.74776026$ $\mu_4 = 10.9200696$ $\mu_5 = \dots$

Koristimo prvih nekoliko članova sljedeće jednačbe:

$$T(r, t) = T_{\infty} + (T_0 - T_{\infty}) \sum_1^{\infty} 2 \frac{\sin\mu_k - \mu_k \cos\mu_k}{\mu_k - \sin\mu_k \cos\mu_k} e^{-\mu_k^2 \alpha t / R^2} \frac{\sin\mu_k \frac{r}{R}}{\mu_k \frac{r}{R}}$$

Rješenje za temperaturu **središta kugle** je:

$$T(r=0, t=100 \text{ s}) = 42 + (800-42)(2 \cdot 0.11334866 / 0.215585667) \cdot \exp(-0.7098959^2 \cdot 1e-5 \cdot 100 / 0.02^2) =$$

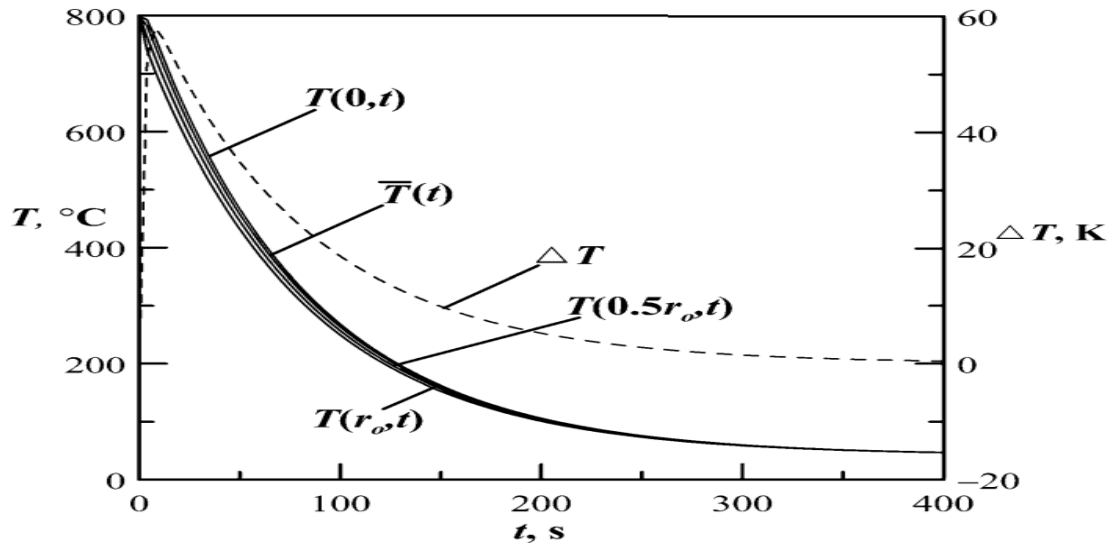
$$T(r=0, t=100 \text{ s}) = 42 + (800-42) \cdot 0.29831 = 268.1 \text{ °C}$$

Rješenje za temperaturu **površine kugle** je:

$$T(r=R, t=100 \text{ s}) = 42 + (800-42)(2 \cdot 0.11334866 / 0.215585667) \cdot \exp(-0.7098959^2 \cdot 1e-5 \cdot 100 / 0.02^2) \cdot (\sin 0.7098959 / 0.7098959) =$$

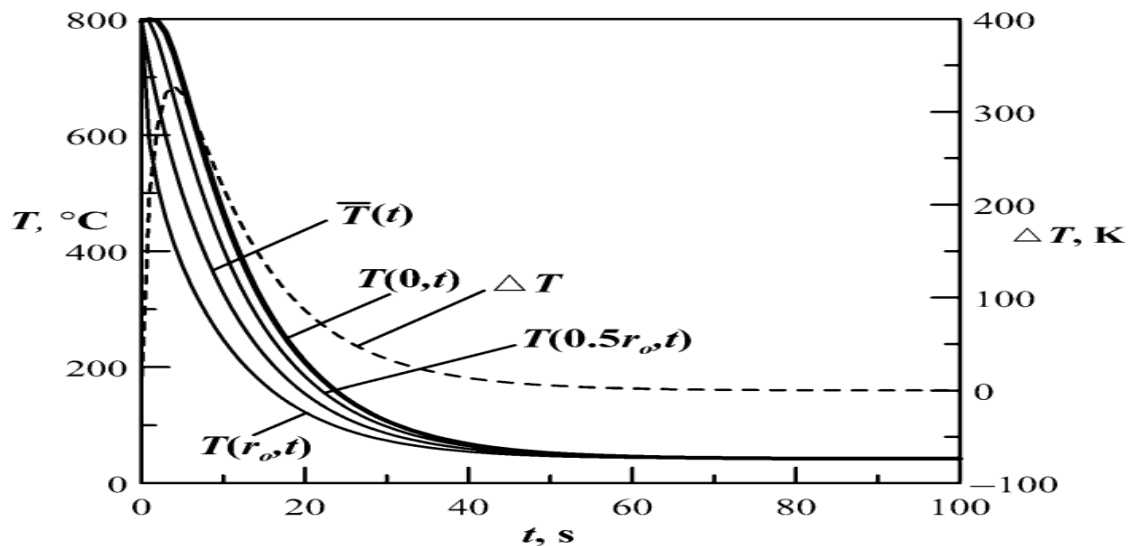
$$T(r=R, t=100 \text{ s}) = 42 + (800-42) \cdot 0.29831 \cdot 0.918099 = 249.6 \text{ °C}$$

Rješenje možemo usporediti s grafičkim prikazom na sljedećoj slici:



Grafički prikaz temperature središta kugle $T(0, t)$, vanjske površine kugle $T(r_0=R, t)$, temperature srednjeg polumjera kugle $T(0.5r_0, t)$, prosječne temperature $T(t)$ i razlike temperatura središta i površine kugle, $\Delta T = T(0,t) - T(r_0, t)$, $h = 400 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$.

Na sljedećoj slici je prikazana ovisnost temperature kao i u prethodnom primjeru, samo uz koeficijent prijelaza topline $h = 4000 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$. Vidljivo je kraće trajanje prijelazne pojave, te veće razlike temperature površine i središta kugle.



Grafički prikaz temperature središta kugle $T(0, t)$, vanjske površine kugle $T(r_0=R, t)$, temperature srednjeg polumjera kugle $T(0.5r_0, t)$, prosječne temperature $T(t)$ i razlike temperatura središta i površine kugle, $\Delta T = T(0,t) - T(r_0, t)$, $h = 4000 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$.

Rješenje pomoću Heislerovih dijagrama

Heislerov dijagram(i) (eng. Heisler chart) je "grafički alat" za procjenu prijenosa topline u toplinskom inženjerstvu. Za određenu jednostavnu geometriju (simetrični beskonačni zid, beskonačni valjak ili kugla) 1947. godine uveo je M. P. Heisler grafički prikaz analitičkog rješenja nestacionarnog prijenosa topline uz konvekcijski prijenos topline na granici tijelo/fluid. Kasnije je dodan i treći grafički prikaz za određenu geometriju (1961. godine, H. Gröber).

Heislerov dijagram omogućuje procjenu temperature u centru tijela (nestacionarni prijenos topline), procjenu temperature površine tijela, te količinu topline prenesene sa/na tijelo jednostavne geometrije (beskrajna stjenka/zid debljine $2L$, beskonačno dugačak valjak polumjera R ili kugla polumjera R).

Iako su Heisler – Gröberove karte brža i jednostavnija alternativa točnim rješenjima tih problema, postoje određena ograničenja. Prvo, tijelo u početku mora biti na jednolikoj temperaturi. Uz to, temperatura okoline i koeficijent konvektivnog prijenosa topline moraju ostati konstantni i ujednačeni. Također, nema generacije topline u tijelu.

Rješenje:

$$Bi = (hR)/\lambda = 400 \text{ Wm}^2\text{s}^{-1} * 0.02 \text{ m} / 46 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1} = 0.1739 \quad 1/Bi = 5.75$$

$$Fo = at/R^2 = 1 * 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1} * 100 \text{ s} / (0.02 \text{ m})^2 = 2.5$$

Iz grafa 5S.7 sa str. 10 (umetak, povećani dio), očitamo vrijednost $\theta(1/Bi = 5.75, Fo=2.5) = 0.30$, što se izvanredno slaže s analitičkim rješenjem. Potrebno je prilagoditi oznake na grafu 5S.7, te vrijedi:

$$\theta = \frac{T_{r=0} - T_{\infty}}{T_{t=0} - T_{\infty}}$$

Iz grafa 5S.8 sa str. 9 očitamo vrijednost $\theta = 0.91$, što se također vrlo dobro slaže s analitičkim rješenjem.

(očitan je vrijednost θ sa krivulje za $r/r_0 = 1$ i vrijednosti apscise za $1/Bi = 5.75$).

Očitajte vrijednost Q/Q_0 sa grafa 5S.9!

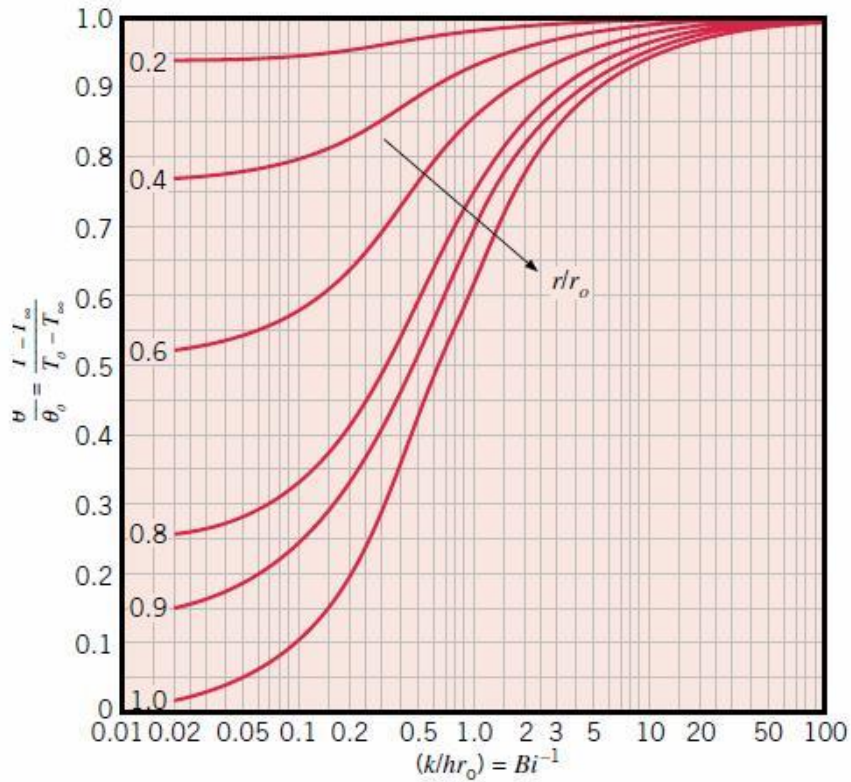


FIGURE 5S.8 Temperature distribution in a sphere of radius r_o [1]. Used with permission.

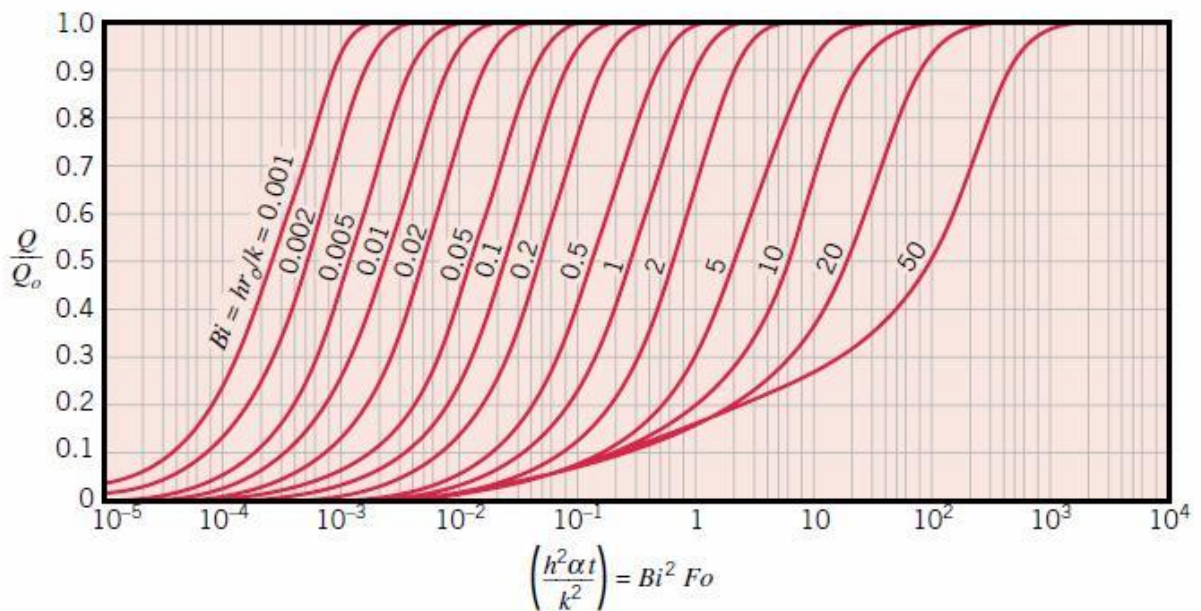


FIGURE 5S.9 Internal energy change as a function of time for a sphere of radius r_o [2]. Adapted with permission.

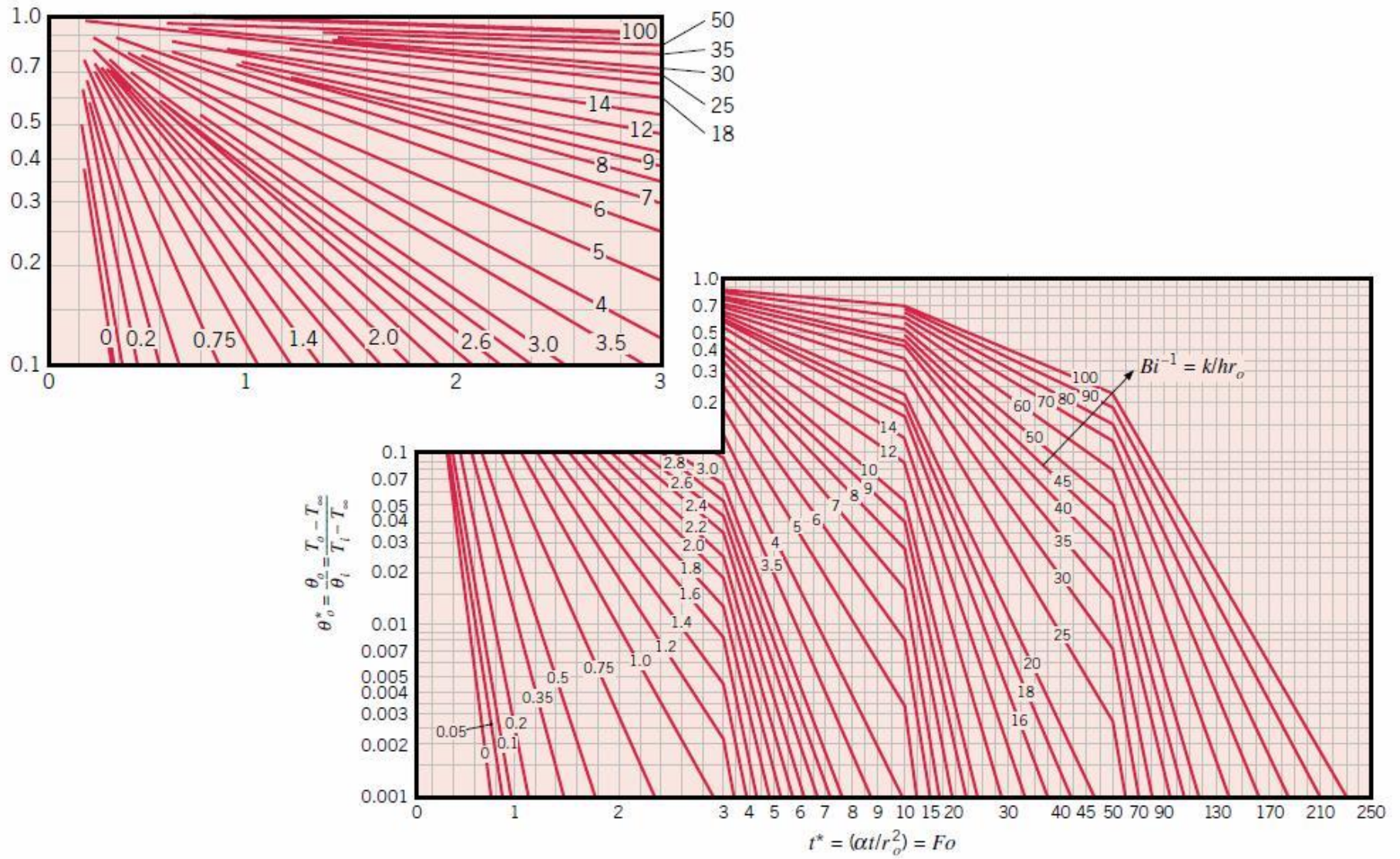


FIGURE 5S.7 Center temperature as a function of time in a sphere of radius r_o [1]. Used with permission.