



LAM

Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije
MATLAB/SIMULINK



SIMBOLIČKO RAČUNANJE U MATLAB-u



Symbolic Math Toolbox

Nenad Bolf

Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije

bolf@fkit.hr, [http:// LAM.fkit.hr](http://LAM.fkit.hr)

SIMBOLIČKO RAČUNANJE

Matematičke proračune u MATLAB-u možemo provoditi sa simboličkim varijablama na sličan način kao i s numeričkim vrijednostima.

→ **SYMBOLIC MATH TOOLBOX**

Temelji se na softverskom paketu **Maple 8** tvrtke *Waterloo Maple, Inc.*

- Kako definirati i koristiti simboličke izraze?
- Simboličko računanje upotrebljava se pri rješavanju inženjerskih zadataka!

SADRŽAJ

- ✓ Kreiranje i rad sa simboličkim varijablama
- ✓ Funkcije za rješavanje, crtanje i manipulaciju simboličkim jednadžbama
- ✓ Faktorizacija i pojednostavljenje matematičkih izraza
- ✓ Rješavanje simboličkih izraza
- ✓ Simboličko deriviranje i integriranje funkcija
- ✓ Rješavanje algebarskih i diferencijalnih jednadžbi

SIMBOLIČKO RAČUNANJE

- Za uobičajene matematičke funkcije postoje knjižnice (*libraries*) kao što su one za kalkulacije, linearnu algebru, algebarske i diferencijalne jednačbe, pojednostavljenje jednačbi i manipulaciju jednačbama
- Direktno iz simboličkih izraza moguće je stvoriti **MATLAB funkcije, Simulink funkcijske blokove i Simscape jednačbe**
- Koristeći **MATLAB® Live Editor** može se kreirati, pokretati i dijeliti matematički kod;

JEDNOSTAVNI PRIMJER

```
>> a = sym ('x - 2');    % a je simbolička varijabla  
>> b = sym ('2*x + 3'); % b je simbolička varijabla  
>> y = a*b              % y je nova simbolička varijabla
```

```
y = (x-2)*(2*x+3)
```

```
>> expand(y)
```

```
ans =
```

```
2*x^2 - x - 6
```

PRIMJER

```
>> S = sym('(x^2 - 3*x - 10)/(x + 2)');
```

```
>> simplify(S)
```

```
ans =
```

```
x - 5
```

Simboličke izraze definiramo pomoću funkcije **sym**.

Argument funkcije **sym** je slovo (*string character*) unutar jednostrukih navodnika.

PRIMJER

Rješimo jednadžbu:

$D = D_0 \cdot \exp(-Q/RT)$ za varijablu **Q**

Jednadžba predstavlja brzinu difuzije

```
>> X = sym('D=D0*exp(-Q/RT)');
```

```
>> solve (X,'Q')
```

```
% Q je pod navodnikom
```

```
% jer se radi o simboličkoj varijabli
```

```
ans =
```

```
    -log(D/D0)*RT
```

DEFINIRANJE SIMBOLIČKIH IZRAZA I VARIJABLI

Dva načina:

1. Stvoriti simbolički izraz odjednom pomoću naredbe **sym** kako je prethodno prikazano ili
2. Naredbom **syms** deklarirati sve simboličke varijable pojedinačno:

```
>> syms a x y;
```

```
>> S = x^2 - 2*y^2 + 3*a;
```

Na taj način definiraju se varijable **a**, **x**, i **y** kao simboličke varijable, a zatim se kreira simbolički izraz **S**.

U prvom slučaju u radnom prostoru bit će samo **S**, dok će se u drugom slučaju biti **S**, **a**, **x** i **y**.

SIMBOLIČKI IZRAZI

Numerički izrazi

```
>> x=1; y=2;
>> s=x+y
```

```
s =
    3
```

```
>> r=sqrt(x^2+y^2)
```

```
r =
    2.2361
```

Simbolički izrazi

```
>> syms x y
>> s=x+y
```

```
s =
x+y
```

```
>> syms x y
>> s='x+y'
```

```
s =
x+y
```

```
>> r=sqrt(x^2+y^2)
```

```
r =
(x^2+y^2)^(1/2)
```

SIMBOLIČKI IZRAZI

```
>>syms a b c d;  
>>A = [a b c; a b c; a b c]
```

```
A =  
[ a, b, c]  
[ a, b, c]  
[ a, b, c]
```

```
>>sum(A(1,:))
```

```
ans =  
a+b+c
```

```
>> sum(A(:,2))
```

```
ans =  
b+b+b
```

PRIMJER MATRIČNOG RAČUNA

Simboličko množenje matrica:

```
>> A = [a b; c d];
```

```
>> A^2
```

```
ans =
```

```
[ a*a+b*c, a*b+b*d]
```

```
[ c*a+d*c, c*b+d*d]
```

a, **b**, **c** i **d** su prethodno deklarirani kao simboličke varijable

FUNKCIJE ZA SIMBOLIČKO RAČUNANJE

Postoji niz funkcija za rad i pojednostavljenje simboličkih izraza:

expand(S)

ekspandira **S** u faktorski produkt

simplify(S)

pojednostavljene **S** primjenom Maple-ovih pravila

simple(S)

traži najjednostavniji oblik simboličkog izraza

poly2sym(V)

kreira simbolički izraz za polinom opisan vektorom **V**

```
>>V = [ 1 -4 0 2 45];
```

```
>> S = poly2sym(V)
```

```
S =
```

```
x^4 - 4*x^3 + 2*x + 45
```

RAD SA SIMBOLIČKIM IZRAZIMA

Funkcije **SIMPLE** i **SIMPLIFY**

```
>> syms x y
```

```
E = 3*x^2-6*x+3
```

```
F = x*(x*(x-8)+10)-5
```

```
>> simple(E)
```

```
ans =  
3*(x-1)^2
```

```
>> simple(F)
```

```
ans =  
x^3-8*x^2+10*x-5
```

```
>> simplify(E)
```

```
ans =  
3*x^2-6*x+3
```

```
>> simplify(F)
```

```
ans =  
x^3-8*x^2+10*x-5
```

RAD SA SIMBOLIČKIM IZRAZIMA

Funkcija **EXPAND**

```
>> syms x y
```

```
>> F=(x-5)^2 +(y-2)^2
```

```
F =
```

```
(x-5)^2+(y-2)^2
```

```
>> expand(F)
```

```
ans =
```

```
x^2-10*x+29+y^2-4*y
```

Algebarska

```
>> expand( (x+y)^3 )
```

```
ans =
```

```
x^3+3*x^2*y+3*x*y^2+y^3
```

Trigonometrijska

```
>> expand( sin(x-y) )
```

```
ans =
```

```
sin(x)*cos(y)-cos(x)*sin(y)
```

RAD SA SIMBOLIČKIM IZRAZIMA

Funkcija **FACTOR**

```
>> syms x y
```

```
>> E = 3*x^2-6*x+3
```

```
>> factor(E)
```

```
ans =  
3*(x-1)^2
```

```
>> F = x^4-1
```

```
>> factor(F)
```

```
ans =  
(x-1)*(x+1)*(x^2+1)
```

RAD SA SIMBOLIČKIM IZRAZIMA

Funkcija **COLLECT**

```
>> syms x y
```

```
>> E=(x-3)*(3*x-6*x^2)+3*x
```

```
E =  
(x-3)*(3*x-6*x^2)+3*x
```

```
>> collect(E)
```

```
ans =  
-6*x^3+21*x^2-6*x
```

```
>> F=(x-3)*(3*y-6*x^2)+3*x^6*y
```

```
F =  
(x-3)*(3*y-6*x^2)+3*x^6*y
```

```
>> collect(F,x)
```

```
ans =  
3*x^6*y-6*x^3+18*x^2+3*x*y-9*y
```

```
>> collect(F,y)
```

```
ans =  
(3*x-9+3*x^6)*y-6*(x-3)*x^2
```


RAČUNANJE SA SIMBOLIČKIM IZRAZIMA

Funkcija **SUBS**

```
>> syms x y
```

```
>> F=3*x^3+2*x^2-3*x+10
```

```
F =  
3*x^3+2*x^2-3*x+10
```

```
>> G=x^3+y^3
```

```
G =  
x^3+y^3
```

```
>> subs(F,x,3)
```

```
ans =  
100
```

```
>> subs(G,x,1)
```

```
ans =  
1+y^3
```

```
>> subs(F,x,1:5)
```

```
ans =  
12 36 100 222 420
```

```
>> subs(G,{x y},{1, 2})
```

```
ans =  
9
```

FUNKCIJE ZA SIMBOLIČKO RAČUNANJE

`solve(f)` rješava simboličku jednadžbu **f** po simboličkoj varijabli (obično **x**)

`solve(f, 'y')` rješava **f(x,y)** po **y**

`solve(f1,...,fn)` rješava sustav jednadžbi

Razmotrimo detaljnije zadnju funkciju.

RJEŠAVANJE SUSTAVA JEDNADŽBI

Riješimo slijedeće jednadžbe:

```
>> eq1 = sym ('3*x + 2*y - z = 10');  
>> eq2 = sym ('-x + 3*y + 2*z = 5');  
>> eq3 = sym ('x - y - z = -1');  
>> [A, B, C] = solve (eq1, eq2, eq3)
```

```
A =  
-2  
B =  
5  
C =  
-6
```

Oznake **A**, **B**, i **C** su rješenja za **x**, **y** i **z**

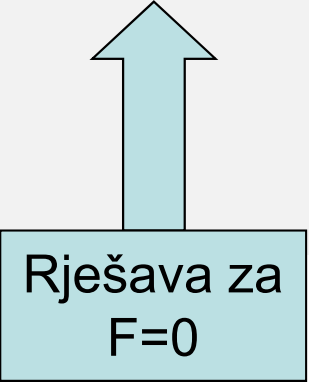
RJEŠAVANJE JEDNADŽBI

```
>> syms x y
```

```
>> F='x+4';
```

```
>> X=solve(F)
```

```
X =  
-4
```



Rješava za
F=0

```
>> E='3*x^2-4*x+5=0';
```

```
>> X=solve(E)
```

```
X =  
[ 2/3+1/3*19^(1/2)]  
[ 2/3-1/3*19^(1/2)]
```

```
>> double(X)
```

```
ans =  
 2.1196  
-0.7863
```

```
>> F='exp(2*x)+3*exp(x)=54';
```

```
>> X=solve(F)
```

```
X =  
[ log(-9)]  
[ log(6)]
```

```
>> double(X)
```

```
ans =  
 2.1972 + 3.1416i  
 1.7918
```

RJEŠAVANJE SUSTAVA JEDNADŽBI

```
>> syms x y
```

```
>> CIRCLE='(x-3)^2+(y-2)^2=4';
```

```
>> LINE='y=2*x-1';
```

```
>> Q=solve(CIRCLE,LINE)
```

```
Q =
```

```
  x: [2x1 sym]
```

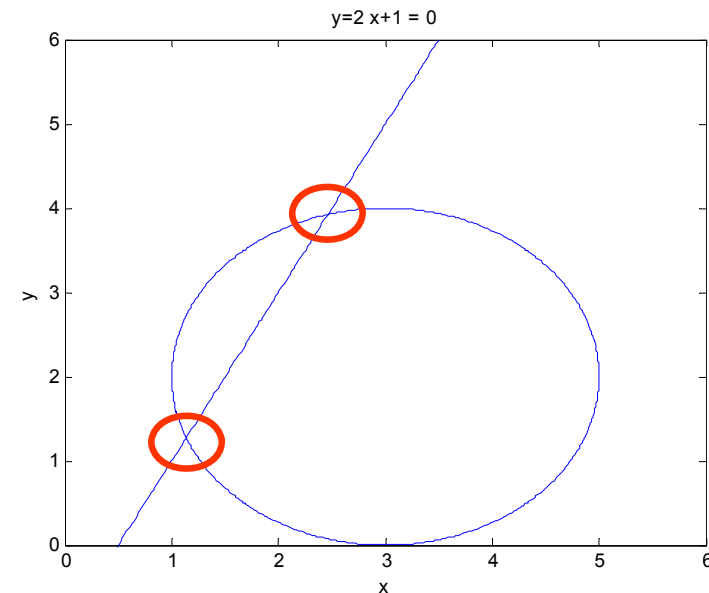
```
  y: [2x1 sym]
```

```
>> Q.x
```

```
ans =
```

```
[
 3/2+1/10*15^(1/2)]
 [ 3/2-1/10*15^(1/2)]
```

Rješava sustav
jednadžbi



```
>>
```

```
double(Q.x)
```

```
ans =
```

```
 2.4633
```

```
 1.1367
```

```
>>
```

```
double(Q.y)
```

```
ans =
```

```
 3.9266
```

```
 1.2734
```

INTEGRIRANJE

MATLAB-om možemo izvoditi simboličko integriranja. Funkcija **int(f)** traži funkciju **F** takvu da je **diff(F) = f**; **diff(F)** je derivacija od **F**.

int(f) računa integral od **f** s obzirom na nezavisnu varijablu

int(f, 't') računa integral od **f** s obzirom na varijablu **t**

int(f, a, b) računa integral od **f** s obzirom na nezavisnu varijablu na intervalu **[a,b]**; **a** i **b** su numeričke vrijednosti

int(f, 't', a, b) računa integral od **f** s obzirom na **t** intervalu **[a,b]**

int(f, 'm', 'n') računa integral od **f** s obzirom na nezavisnu varijablu na intervalu **[m,n]**; **m** i **n** su simbolički izrazi

INTEGRIRANJE

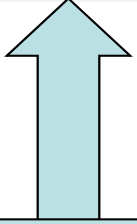
Odabir varijable za integriranje

```
>> syms a x
>> f = sin(a*x)
```

```
>> int(f)
```

```
-1/a*cos(a*x)
```

Pretpostavlja se
da se radi o
varijabli x



```
>> syms a b x
>> f = a*sin(b*x)
```

```
>> int(f,a)
```

```
1/2*a^2*sin(b*x)
```

```
>> int(f,b)
```

```
-a/x*cos(b*x)
```

```
>> int(f,x)
```

```
-a/b*cos(b*x)
```

Odabir granica numeričke integracije

```
>> syms a b x
>> f = a*sin(b*x)
```

```
>> int(f,x,0,1)
```

```
-a*(cos(b)-1)/b
```

Moguć je i neodređeni integral

```
>> syms a b x
>> f=exp(-x^2)
```

```
>> int(f,x,1,inf)
```

```
1/2*pi^(1/2)
```

DERIVIRANJE

Funkcija **diff** određuje derivaciju simboličkog izraza:

diff(f) derivacija po nezavisnoj varijabli **x**

diff(f, 't') derivacija po varijabli **t**

diff(f, n) *n*-ta derivacija po nezavisnoj varijabli

diff(f, 't', n) *n*-ta derivacija po varijabli **t**

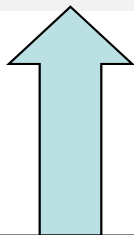
DERIVIRANJE

Odabir varijable po kojoj se derivira

```
>> syms a x
>> f = sin(a*x)
```

```
>> diff(f)
```

```
cos(a*x)*a
```



Pretpostavlja se varijabla x

```
>> syms a b x
>> f = a*sin(b*x)
```

```
>> diff(f,a)
```

```
sin(b*x)
```

```
>> diff(f,b)
```

```
a*cos(b*x)*x
```

```
>> diff(f,x)
```

```
a*cos(b*x)*b
```

Odabir reda derivacije

```
>> syms a b x
>> f = a*sin(b*x)
```

```
>> diff(f,a,2)
```

```
0
```

```
>> diff(f,b,2)
```

```
-a*sin(b*x)*x^2
```

```
>> diff(f,x,2)
```

```
-a*cos(b*x)*b^2
```

```
>> diff(f,x,3)
```

```
-a*cos(b*x)*b^3
```

DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

MATLAB-om možemo rješavati diferencijalne jednadžbe.

Pretpostavimo diferencijalnu jednadžbu $dx/dt = -a*x$ koju želimo riješiti za x

```
>>dsolve('Dx = - a*x')
```

```
ans =
```

```
C1*exp(-a*t)
```

```
% konstanta C1 nije određena
```

```
>>dsolve('Dx = -a*x', 'x(0) = 2')
```

```
% zadan početni uvjet
```

```
ans =
```

```
2*exp(-a*t)
```

```
% rješenje diferencijalne jednadžbe
```

Naredbom **help dsolve** u Command Window-u možemo pregledati sve mogućnosti.

RJEŠAVANJE DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI

Funkcija **dsolve** simbolički rješava obične diferencijalne jednačbe. Jednačbe se definiraju pomoću simboličkih izraza koji sadrže slovo D – što znači diferenciranje.

Primjer:

$$\frac{dy}{dt} = 1 + y^2$$

```
dsolve('Dy=1+y^2')
```

```
tan(t+C1)
```

Primjer:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x^2 = 1$$

```
x = dsolve('(Dx)^2+x^2=1')
```

```
x =
     [ -1]
     [  1]
     [ sin(t-C1)]
     [-sin(t-C1)]
```

Simboli D2, D3, ... DN, odgovaraju drugoj, trećoj, ..., n-toj derivaciji. Tako je D2y predstavlja:

$$\frac{d^2 y}{dt^2}$$

Mogu se zadati i početni uvjeti:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x^2 = 1$$

uz $x(0)=0$

```
x = dsolve('(Dx)^2+x^2=1','x(0)=0')
```

```
x =
     [ sin(t)]
     [-sin(t)]
```

ODREĐIVANJE LIMESA

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1+x}{x^2}} - \frac{1}{x}$$

```
>> syms x
```

Definiranje funkcije **y**:

```
>> y=(((1+x)/(x^2))^0.5)-(1/x)
```

Određivanje limesa:

```
>> limit(y,x,0,'right')
```

```
ans =
```

```
1/2
```

y : funkcija od **x**

x: parametar od **Y** koji se približava određenoj vrijednosti

0: Vrijednost kojoj **x** teži

'right': s desne strane

GRAFIČKI PRIKAZ SIMBOLIČKIH IZRAZA

S je simbolički izraz od **x**, slijedi

>> ezplot(S, [xmin, xmax])

crti **S** u granicama između **xmin** i **xmax**.

>> ezplot(S) uzima granice **[-2 * pi, 2 * pi]**

Pomoću naredbi **xlabel**, **ylabel** i **title** dodajemo imena **x** i **y** osi te naslov.

CRTANJE SIMBOLIČKIH IZRAZA

Funkcije **EZPLOT** and **PLOT**

Funkcija **ezplot** automatski odabire područje na x- i y- osi. Područje se, također može definirati dodatnim argumentima ili naknadnim naredbama.

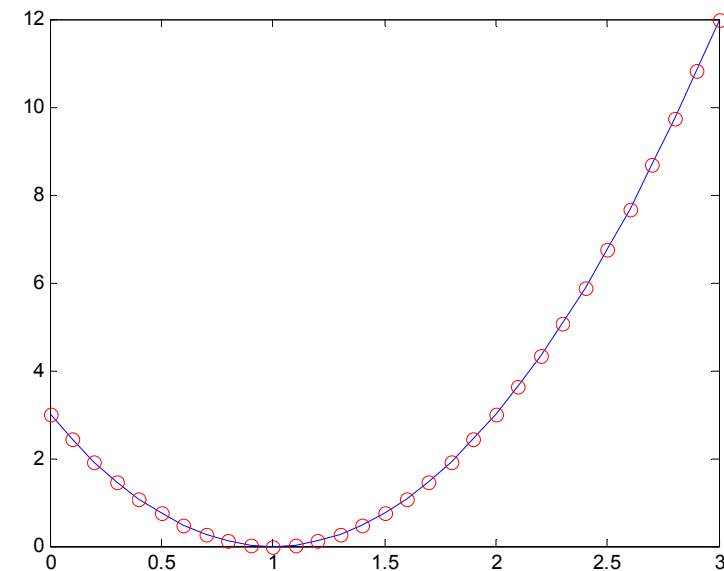
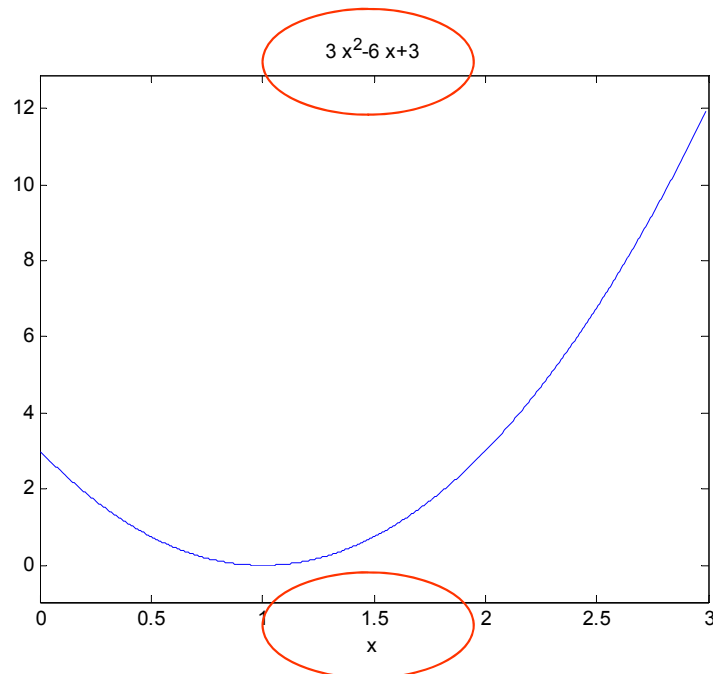
```
>> syms x y
```

```
>> F=3*x^2-6*x+3;
```

```
>> ezplot(F,[0 3])
```

```
>> X=0:0.1:3; Y=subs(F,X);
```

```
>> plot(X,Y,'-o','Markeredgecolor','r')
```



SYMBOLIC MATH TOOLBOX

Područje	Što obuhvaća?
CALCULUS	Diferenciranje, integriranje, limesi, sumiranje, Taylorov red
LINEAR ALGEBRA	Inverzi, determinante, svojstvene vrijednosti, dekompozicija singularnih vrijednosti, kanonski oblici simboličkih matrica
SIMPLIFICATION	Metode pojednostavljenja algebarskih izraza
SOLUTION OF EQUATIONS	Simbolička i numerička rješenja algebarskih i diferencijalnih jednadžbi
SPECIAL MATHEMATICAL FUNCTION	Posebne funkcije primjenjene matematike
VARIABLE-PRECISION ARITHMETICS	Numerički proračun matematičkih izraza do zadane točnosti
TRANSFORMS	Fourier-ova, Laplace-ova, z-transformacija i odgovarajuće inverzne transformacije