Matematika 1

Seminar

Tin Adlešić

Sadržaj

1 Vektori **3**

1.1 Pojam vektora . . . 3

1.2 Analitički zapis vektora . . . 7

1.3 Zadaci za vježbu . . . 13

2 Transformacije ravnine i prostora **15**

2.1 Pojam matrice . . . 15

2.2 Translacija . . . 16

2.3 Rotacija . . . 17

2.4 Simetrija i projekcija . . . 19

2.5 Zadaci za vježbu . . . 21

3 Algebra matrica. Inverzna matrica. Determinanta **22**

3.1 Matrične operacije . . . 22

3.2 Primjena matrica na transformacije . . . 24

3.3 Determinanta . . . 26

3.4 Inverz matrice . . . 30

3.5 Zadaci za vježbu . . . 35

4 Skalarni, vektorski i mješoviti produkt vektora **36**

4.1 Skalarni produkt . . . 36

4.2 Vektorski produkt . . . 39

4.3 Mješoviti produkt vektora . . . 40

4.4 Zadaci za vježbu . . . 41

5 Linearni sustavi i njihovo rješavanje **43**

5.1 Regularni sustavi 44

5.2 Gauss-Jordanova metoda 46

5.3 Zadaci za vježbu 50

6 Funkcije **52**

6.1 Elementarne funkcije 52

6.2 Kompozicija funkcija 59

6.3 Prirodna domena i slika funkcije 60

6.4 Injektivnost, surjektivnost i bijektivnost 62

6.5 Inverz funkcije 64

7 Limes funkcije **65**

8 Derivacija funkcije **69**

8.1 L'Hospitalovo pravilo 72

9 Tangenta na graf funkcije, linearna aproksimacija i Taylorov red **73**

9.1 Tangenta na graf funkcije i linearna aproksimacija 73

9.2 Taylorov red 74

10 Pad, rast, lokalni ekstremi, konveksnost, konkavnost i točke infleksije **77**

10.1 Intervali monotonosti i lokalni ekstremi 77

10.2 Asimptote, intervali konkavnosti, konveksnosti i točke infleksije 79

10.3 Ispitivanje toka funkcije 81

Rješenja zadataka **83**

Dodaci **86**

A Logika i teorija skupova **87**

A.1 Logika sudova 87

A.2 Teorija skupova 89

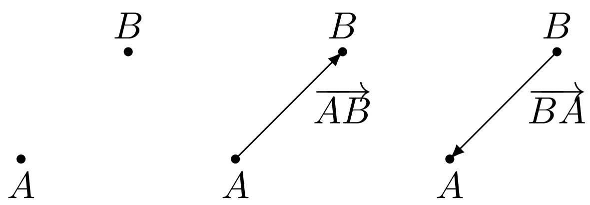
B Trigonometrija **91**

Poglavlje 1

Vektori

1.1 Pojam vektora

Definicija 1.1. Dužinu $\overline{AB}$ nazivamo **usmjerena** ili **orijentirana dužina** ako ima uređene rubne točke, tj. ako znamo koja je početna, a koja završna točka. Ako je A početna, B završna točka, tu usmjerenu dužinu označavamo s $\overrightarrow{AB}$.



Dvije usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ su ekvivalentne (u oznaci $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$) ako i samo ako $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ imaju zajedničko polovište.

Definicija 1.2. **Vektor** je skup svih međusobno ekvivalentnih usmjerenih dužina. Vektore označavamo s $\vec{a}$, $\vec{b}$, ...

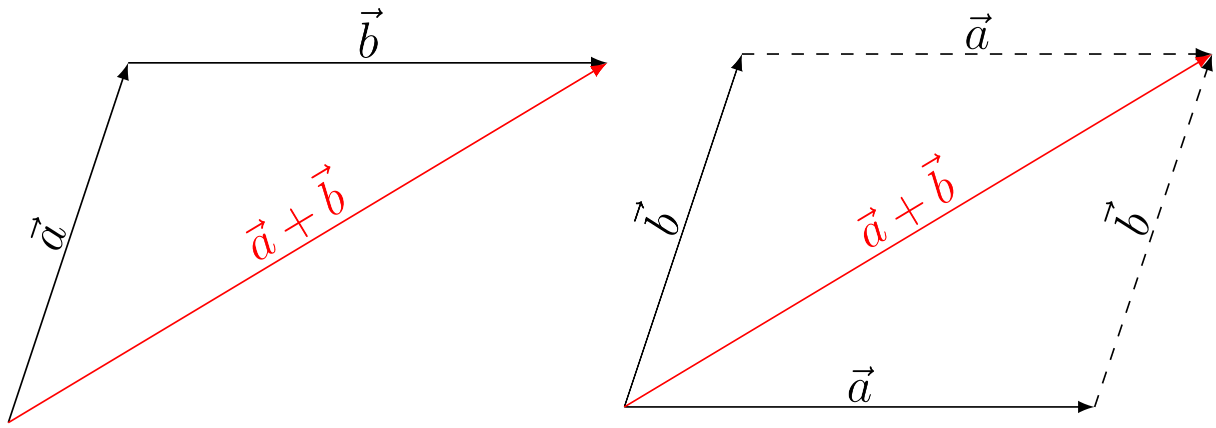
Svaki vektor jedinstveno je određen duljinom, smjerom i orijentacijom:

- **duljina** vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ definira se kao duljina dužine $\overline{AB}$ i označava s $|\vec{a}| = \left|\overline{AB}\right|$
- **smjer** vektora je skup svih međusobno paralelnih pravaca s tim vektorom
- **orijentacija** ovisi o krajnjim točkama te može biti $\overrightarrow{AB}$ ili $\overrightarrow{BA}$

Napomena 1.3. 1. Za vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ definiramo vektor $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ koji nazivamo suprotnim vektorom vektora $\vec{a}$.

2. Vektor čija su početna i završna točka jednake ($\overrightarrow{AA}$) nazivamo **nulvektor** i označavamo s $\vec{0}$.

Definicija 1.4. Zbroj vektora $\vec{a} + \vec{b}$ je vektor koji se dobije pravilom trokuta ili pravilom paralelograma



Pravilo trokuta

Pravilo paralelograma

Definicija 1.5. **Umnožak vektora** $\vec{a}$ i **skalara** λ je vektor $\lambda\vec{a}$ za koji vrijedi sljedeće:

a) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$

b) smjer je jednak vektoru $\vec{a}$

c) orijentacija je jednaka vektoru $\vec{a}$ ako je $\lambda > 0$, a suprotna ako je $\lambda < 0$

Ako je $\lambda = 0$ ili $\vec{a} = \vec{0}$, onda je $\lambda\vec{a} = \vec{0}$.

Teorem 1.6. (Svojstva zbrajanja vektora) Neka su $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektori. Tada vrijedi sljedeće:

a) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

b) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

c) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

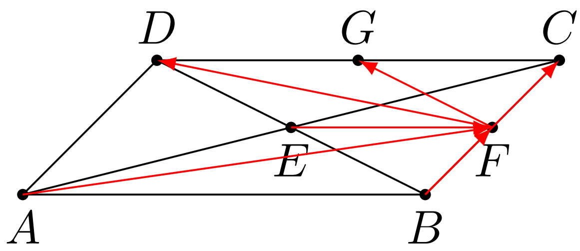
d) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

e) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

Definicija 1.7. **Linearna kombinacija** vektora $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ i skalara $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ je vektor $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n$. Skalare zovemo **koeficijenti** linearne kombinacije.

Zadatak 1. Neka je $ABCD$ paralelogram, E sjecište dijagonala, F polovište stranice $\overline{BC}$ i G polovište stranice $\overline{CD}$. Odredite vektore $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{FG}$ i $\overrightarrow{FD}$ kao lineanu kombinaciju vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$.

Rješenje.



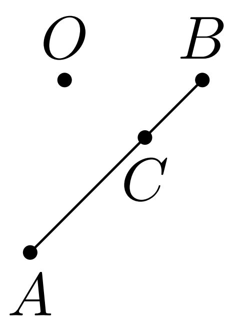
$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{BC} &= 0 \cdot \overrightarrow{AB} + 1 \cdot \overrightarrow{AD} \\
\overrightarrow{BF} &= 0 \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD} \\
\overrightarrow{EF} &= \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AD} \\
\overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD} \\
\overrightarrow{FG} &= -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD} \\
\overrightarrow{FD} &= -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD}.
\end{aligned}
$$

Zadatak 2. Neka je $\overline{AB}$ dužina, C točka na pravcu kroz A i B te O proizvoljna točka. Izrazite $\overrightarrow{OC}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ ako je $|\overline{AC}| = 2\,|\overline{BC}|$ i

a) C leži na dužini $\overline{AB}$

b) C ne leži na dužini $\overline{AB}$.

Rješenje. a)



$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$$
$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}.$$

Iz gornjih jednakosti dobivamo

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \tag{1.1}$$
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}. \tag{1.2}$$

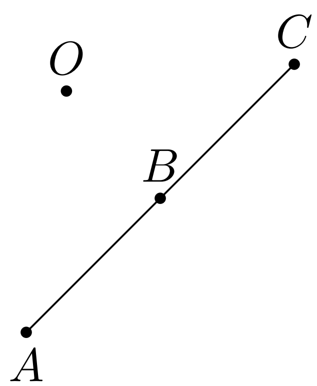
Iz slike vidimo da vrijedi $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CB} = -2\overrightarrow{BC}$, a onda uvrštavanjem u 1.1 dobivamo

$$-2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \tag{1.3}$$
$$\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}. \tag{1.4}$$

Uvrštavanjem 1.4 u 1.2 dobivamo

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}.$$

b)



$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$$
$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}.$$

Iz gornjih jednakosti dobivamo

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \tag{1.5}$$
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}. \tag{1.6}$$

Iz slike vidimo da vrijedi $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BC}$, a onda uvrštavanjem u 1.5 dobivamo

$$2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \tag{1.7}$$
$$\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}. \tag{1.8}$$

Uvrštavanjem 1.8 u 1.6 dobivamo

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{OC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}.$$

1.2 Analitički zapis vektora

U Kartezijevom koordinatnom sustavu u prostoru uvodimo **koordinatne vektore** $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ čije su početne točke u ishodištu, a završne točke redom u točkama $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$.

Vektor s početkom u ishodištu $O = (0,0,0)$, a krajem u $T = (x,y,z)$ može se zapisati kao linearna kombinacija koordinatnih vektora:

$$\overrightarrow{OT} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Tada vektor $\overrightarrow{OT}$ još nazivamo **radijvektor** i često ga poistovjećujemo s njegovom završnom točkom T.

Napomena 1.8. Svaki vektor može se zapisati kao linearna kombinacija koordinatnih vektora. Ako su $T_1 = (a_1, a_2, a_3)$ i $T_2 = (b_1, b_2, b_3)$ dvije točke u prostoru, tada imamo

$$\overrightarrow{T_1T_2} = (b_1 - a_1)\vec{i} + (b_2 - a_2)\vec{j} + (b_3 - a_3)\vec{k}.$$

Primjer. Odredite vektor $\overrightarrow{AB}$ ako je $A(2,-3,1)$ i $B(4,5,-2)$.

Rješenje. $\overrightarrow{AB} = (4-2)\vec{i} + (5-(-3))\vec{j} + (-2-1)\vec{k} = 2\vec{i} + 8\vec{j} - 3\vec{k}$.

Definicija 1.9. Dva vektora su **kolinearna** ako su istog smjera (leže na paralelnim pravcima).

Teorem 1.10. (Svojstva vektora) Neka su $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ vektori te λ skalar. Tada vrijedi:

a) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$

b) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} + (a_3 + b_3)\vec{k}$

c) $\lambda \cdot \vec{a} = \lambda a_1\vec{i} + \lambda a_2\vec{j} + \lambda a_3\vec{k}$

d) $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

e) $\vec{a}, \vec{b}$ su kolinearni $\Leftrightarrow \vec{a} = \lambda\vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3} = \lambda$.

Primjer. Za vektore $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ i $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ odredite $\vec{a} + \vec{b}$, $|\vec{a}|$ i $-2\vec{a}$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\vec{a} + \vec{b} &= (2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) + (-\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}) \\
&= (2-1)\vec{i} + (-1+2)\vec{j} + (3-5)\vec{k} \\
&= \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\vec{a}| &= \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} \\
&= \sqrt{4+1+9} \\
&= \sqrt{14}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-2\vec{a} &= -2 \cdot (2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) \\
&= (-2) \cdot 2\vec{i} + (-2) \cdot (-\vec{j}) + (-2) \cdot 3\vec{k} \\
&= -4\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}.
\end{aligned}$$

Zadatak 3. Zadane su točke $A(3,1,4)$ i $B(2,5,1)$. Odredite sve vrijednosti koordinate z točke $C(3,2,z)$ tako da $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ budu jednakih duljina.

Rješenje.

$$\overrightarrow{AB} = -\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}.$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{26}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{j} + (z-4)\vec{k}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1 + z^2 - 8z + 16} = \sqrt{z^2 - 8z + 17}$$

Iz uvjeta zadatka imamo $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$, stoga vrijedi

$$\sqrt{26} = \sqrt{z^2 - 8z + 17}$$

$$26 = z^2 - 8z + 17$$

$$z^2 - 8z - 9 = 0$$

$$z_1 = -1, \quad z_2 = 9.$$

Zadatak 4. Zadane su točke $A(-2,-1,1)$, $B(4,-2,2)$ i $C(6,1,3)$. Odredite koordinate točke D tako da četverokut $ABCD$ bude paralelogram.

Rješenje. Označimo $D(x,y,z)$. Da bi četverokut $ABCD$ bio paralelogram, mora vrijediti $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AB} = 6\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

$$\overrightarrow{DC} = (6-x)\vec{i} + (1-y)\vec{j} + (3-z)\vec{k}.$$

Iz $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ sada dobivamo

$$6 = 6 - x$$

$$-1 = 1 - y$$

$$1 = 3 - z$$

$$x = 0, \quad y = 2, \quad z = 2.$$

Zadatak 5. Odredite završnu točku vektora $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ ako je početna točka $(1,2,-2)$.

Rješenje. Označimo početnu točku s $A(1,2,-2)$ i konačnu točku s $B(x,y,z)$. Tada imamo

$$\overrightarrow{AB} = (x-1)\vec{i} + (y-2)\vec{j} + (z+2)\vec{k}.$$

Budući da vrijedi $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, dobivamo

$$x - 1 = 2$$

$$y - 2 = 3$$

$$z + 2 = -4$$

$$x = 3, \quad y = 5, \quad z = -6.$$

Iz toga slijedi da je završna točka $B(3, 5, -6)$.

Zadatak 6. Odredite završnu točku vektoru kojem je početna točka $(1, 1, 1)$, dva puta je dulji i iste je orijentacije kao vektor $\overrightarrow{AB}$, pri čemu je $A(-1, 2, 3)$ i $B(0, 1, -2)$.

Rješenje. Označimo početnu točku s $C(1, 1, 1)$, završnu s $D(x, y, z)$. Imamo

$$\overrightarrow{AB} = \vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k}$$
$$\overrightarrow{CD} = (x-1)\vec{i} + (y-1)\vec{j} + (z-1)\vec{k}.$$

Iz uvjeta zadatka imamo $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$, stoga dobivamo

$$x - 1 = 2$$

$$y - 1 = -2$$

$$z - 1 = -10$$

$$x = 3, \quad y = -1, \quad z = -9.$$

Završna točka je $D(3, -1, -9)$.

Zadatak 7. Zadana je točka $A(1, 2, 3)$. Odredite točku B usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}$ tako da je $P(2, 3, 7)$ polovište dužine $\overline{AB}$.

Rješenje. Označimo $B(x, y, z)$. Budući da je P polovište dužine $\overline{AB}$, mora vrijediti

$\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{AP}$.

$$\overrightarrow{AB} = (x-1)\vec{i} + (y-2)\vec{j} + (z-3)\vec{k}$$
$$\overrightarrow{AP} = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}.$$

Iz uvjeta dobivamo

$$x - 1 = 2$$
$$y - 2 = 2$$
$$z - 3 = 8$$
$$x = 3, \quad y = 4, \quad z = 11.$$

Tražena točka je $B(3, 4, 11)$.

Zadatak 8. a) Odredite koja dva od navedenih vektora su kolinearni $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$

b) Odredite realne brojeve x i y tako da su vektori $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ i $\vec{b} = 3\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ kolinearni.

Rješenje. a) Provjerimo sve moguće parove koristeći uvjet kolinearnosti.

i) Ako vrijedi $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, onda imamo

$$2 = 3\lambda, \ -1 = 2\lambda, \ 3 = -\lambda,$$

iz čega slijedi $\lambda = \dfrac{2}{3}$ i $\lambda = -3$, što je kontradikcija.

ii) Ako vrijedi $\vec{a} = \lambda\vec{c}$, onda imamo

$$2 = -4\lambda, \ -1 = 2\lambda, \ 3 = -6\lambda,$$

iz čega slijedi $\lambda = -\dfrac{1}{2}$. Dakle, $\vec{a}$ i $\vec{c}$ su kolinearni.

iii) Ako vrijedi $\vec{b} = \lambda\vec{c}$, onda imamo

$$3 = -4\lambda, \ 2 = 2\lambda, \ -1 = -6\lambda,$$

iz čega slijedi $\lambda = 1$ i $\lambda = -\frac{1}{6}$, što je kontradikcija.

b) Koristimo uvjet kolinearnosti $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Tada dobivamo

$$3 = -\lambda$$
$$x = 2\lambda$$
$$y = -\lambda.$$

Iz prvog uvjeta slijedi $\lambda = -3$, stoga dobivamo $x = -6, y = 3$.

Zadatak 9. Prikažite vektor $\vec{c} = -4\vec{j} - 3\vec{k}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j}$ i $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Rješenje. Neka su α i β realni brojevi.

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$
$$-4\vec{j} - 3\vec{k} = (3\alpha + \beta)\vec{i} + (-\alpha + \beta)\vec{j} + \beta\vec{k}$$
$$3\alpha + \beta = 0, \quad -\alpha + \beta = -4, \quad \beta = -3.$$

Uvrštavanjem $\beta = -3$ u drugu jednakost dobivamo $-\alpha - 3 = -4$, odnosno $\alpha = 1$. Stoga je konačno rješenje $\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b}$.

Nije uvijek moguće neki vektor zapisati kao linearnu kombinaciju drugih vektora.

Primjer. Prikažite vektor $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ i $\vec{b} = 2\vec{j} - 6\vec{k}$.

Rješenje.

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$
$$\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \alpha\vec{i} + (\alpha + 2\beta)\vec{j} + (-6\beta)\vec{k}$$
$$\alpha = 1, \quad \alpha + 2\beta = 1, \quad \beta = -\frac{1}{6}.$$

Uvrštavanjem $\alpha = 1$ i $\beta = -\frac{1}{6}$ u drugu jednakost dobivamo $\frac{2}{3} = 1$, što je kontradikcija. Dakle, nije moguće $\vec{c}$ prikazati kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Općenito, svaki vektor možemo prikazati kao linearnu kombinaciju triju vektora samo ako su oni linearno nezavisni.

Zadatak 10. Prikažite vektor $\vec{d} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$ pomoću vektora $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ i $\vec{c} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

Rješenje. Neka su α, β i γ realni brojevi.

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$$
$$2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k} = (2\alpha + 2\beta + 4\gamma)\vec{i} + (-3\alpha + 4\beta + 2\gamma)\vec{j} + (\alpha + 3\beta + 4\gamma)\vec{k}$$
$$2\alpha + 2\beta + 4\gamma = 2, \quad -3\alpha + 4\beta + 2\gamma = 3, \quad \alpha + 3\beta + 4\gamma = 3.$$

Iz treće jednakosti dobivamo $\alpha = 3 - 3\beta - 4\gamma$, uvrštavamo u prve dvije te dobivamo

$$\beta + \gamma = 1$$
$$13\beta + 14\gamma = 12.$$

Iz gornjih jednakosti slijedi $\gamma = -1$ i $\beta = 2$ te $\alpha = 1$, što znači da imamo $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$.

1.3 Zadaci za vježbu

Zadatak 1.1. Neka je $ABCD$ paralelogram. Odredite vektore $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BD}$.

Zadatak 1.2. Neka je $ABCDEF$ pravilni šesterokut i neka je O sjecište dijagonala, a G polovište stranice $\overline{EF}$. Izrazite $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BD}$ i $\overrightarrow{EG}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$.

Zadatak 1.3. Neka su $A(-1, 2, 1)$, $B(3, 0, 1)$ i $C(2, 2, -1)$ vrhovi trokuta ABC. Odredite vektor težišnice $\overrightarrow{CC_1}$ i točku C_1.

Zadatak 1.4. Zadane su točke $A(-2, 3, 1)$, $B(1, 4, 2)$ i $C(-3, y, 0)$. Odredite sve vrijednosti od y tako da vrijedi $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$.

Zadatak 1.5. Odredite jesu li $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni ako vrijedi:

a) $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ i $\vec{b} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k}$

b) $\vec{a} = -\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ i $\vec{b} = -3\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$

c) $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ i $\vec{b} = -6\vec{i} - 6\vec{j} + 9\vec{k}$

d) $\vec{a} = 3\vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$

Zadatak 1.6. Prikažite $\vec{d}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ ako vrijedi:

a) $\vec{d} = -3\vec{i} + 10\vec{j} - 8\vec{k}$,

$\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$,

$\vec{b} = -3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$,

$\vec{c} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$

b) $\vec{d} = 7\vec{i} - 12\vec{j} + 8\vec{k}$

$\vec{a} = -5\vec{j} + 3\vec{k}$,

$\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$,

$\vec{c} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$

c) $\vec{d} = -9\vec{i} - 2\vec{j} - 8\vec{k}$

$\vec{a} = -2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$,

$\vec{b} = -\vec{i} + 4\vec{k}$,

$\vec{c} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$

d) $\vec{d} = -2\vec{i} + 12\vec{j} + 18\vec{k}$

$\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}$,

$\vec{b} = -6\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$,

$\vec{c} = 7\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}$

Poglavlje 2

Transformacije ravnine i prostora

2.1 Pojam matrice

Definicija 2.1. Neka su m i n prirodni brojevi. Niz elemenata poredanih u pravokutnu shemu od m redaka i n stupaca oblika

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

nazivamo **matrica tipa** $m \times n$.

Matricu često skraćeno zapisujemo kao $A = (a_{ij})$.

Napomena 2.2. Dvije matrice $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ su jednake ako vrijedi $a_{ij} = b_{ij}$ za sve i, j.

Definicija 2.3. Kažemo da je matrica **kvadratna** ako ima jednak broj stupaca i redaka.

Definicija 2.4. Matricu oblika

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

nazivamo **dijagonalna matrica**.

Nul-matrica je kvadratna matrica čiji su svi elementi jednaki 0. **Jedinična** matrica je dijagonalna matrica čiji su dijagonalni elementi jednaki 1.

Primjer. 1. Nul-matrica trećeg reda (3×3)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Jedinična matrica drugog reda (2×2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Proizvoljna 2×3 matrica

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Napomena 2.5. Vektor $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ možemo zapisati kao 3×1 matricu $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

Definicija 2.6. Neka je zadana matrica A tipa $m \times n$ i vektor v duljine n. **Djelovanje matrice** A na vektor $\vec{v}$ definiramo kao

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \dots a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \dots a_{2n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \dots a_{mn}v_n \end{bmatrix}.$$

Primjer. Odredite djelovanje matrice $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ na vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + -2 \cdot (-4) + 0 \cdot 4 \\ -3 \cdot 1 + 5 \cdot (-4) + 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -15 \end{bmatrix}.$$

2.2 Translacija

Definicija 2.7. **Translacija** prostora određena **vektorom translacije** $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ je preslikavanje koje svakoj točki $T(x, y, z)$ pridružuje točku $T'(x', y', z')$ tako da vrijedi

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \\ z + c \end{bmatrix},$$

$$T(x, y, z) \overset{\vec{v}}{\mapsto} T(x + a, y + b, z + c).$$

Primjer. Odredite točku dobivenu translacijom točke $T(-1,0,5)$ za vektor $\vec{v} = 3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$.

Rješenje.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$T(-1,0,5) \mapsto T'(2,2,4)$.

2.3 Rotacija

Definicija 2.8. Rotacija ravnine oko ishodišta za kut α je preslikavanje određeno **matricom rotacije**

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

koje svakoj točki $T(x,y)$ pridružuje točku $T'(x,y)$ tako da vrijedi

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{bmatrix},$$

$T(x,y) \mapsto T'(x\cos\alpha - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y\cos\alpha)$.

Primjer. Zapišite matricu rotacije u ravnini oko ishodišta za $90°$ i odredite sliku točke $T(x,y)$ pri toj transformaciji.

Rješenje. Znamo da vrijedi $\sin(90°) = 1$ i $\cos(90°) = 0$, stoga dobivamo

$$\begin{bmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Djelovanje matrice rotacije na toču T dano je s

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix},$$

$T(x,y) \mapsto T'(-y,x)$

Zadatak 11. Zapišite matrice rotacija u ravnini oko ishodišta za kut α te odredite sliku točke $T(-2,4)$ ako je:

a) $\alpha = 45°$

b) $\alpha = 150°$

c) $\alpha = 300^\circ$

Rješenje. a) Vrijedi $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, stoga imamo

$$\begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Djelovanje matrice na točku T dano je s

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

b) Vrijedi $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$, stoga imamo

$$\begin{bmatrix} \cos 150^\circ & -\sin 150^\circ \\ \sin 150^\circ & \cos 150^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Djelovanje matrice na točku T dano je s

$$\begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} - 2 \\ -1 - 2\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

c) Vrijedi $\cos 300^\circ = \frac{1}{2}$ i $\sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, stoga imamo

$$\begin{bmatrix} \cos 300^\circ & -\sin 300^\circ \\ \sin 300^\circ & \cos 300^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Djelovanje matrice na točku T dano je s

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} + 2 \end{bmatrix}.$$

Definicija 2.9. Rotacije prostora oko x, y i z-osi određene su redom matricama

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad R_y = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad R_z = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 12. Zapišite matricu rotacije za kut $\alpha = 120^\circ$ oko

a) x-osi

b) z-osi.

Odredite sliku točke $T(4,2,6)$ pri tim rotacijama.

Rješenje. Vrijedi $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, stoga imamo

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ 0 & \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Djelovanje matrice na točku T dano je s

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1-3\sqrt{3} \\ \sqrt{3}-3 \end{bmatrix}.$$

b)

$$\begin{bmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ & 0 \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Djelovanje matrice na točku T dano je s

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}-1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

2.4 Simetrija i projekcija

Definicija 2.10. Simetrije ravnine i prostora određene su djelovanjem sljedećih matrica:

Simetrije ravnine

(a) Centralna simetrija ravnine s obzirom na ishodište

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) Osne simetrije s obzirom na x i y-os

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Simetrije prostora

(a) Centralna simetrija s obzirom na ishodište

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) Osne simetrije s obzirom na x, y i z osi

$$S_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad S_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad S_z = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

(c) Simetrije s obzirom na koordinatne ravnine xy, xz i yz

$$S_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad S_{xz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_{yz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Napomena 2.11. Matrice projekcija na koordinatne osi i koordintne ravnine dobivaju se iz pripadnih matrica simetrija tako da se svako pojavljivanje broja -1 zamijeni brojem 0. Pripadne projekcije označavaju se redom s P_x, P_y, P_z, P_{xy}, P_{xz} i P_{yz}.

Primjer. Matrica projekcije na xz ravninu dana je s

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 13. Zapišite matrice sljedećih transformacija prostora

a) simetrija s obzirom na y-os

b) simetrija s obzirom na xz-ravninu

c) projekcija na yz-ravninu

Primijenite te transformacije na točku $(2, -1, 4)$.

Rješenje. a) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}.$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Definicija 2.12. Transformacije ravnine/prostora koje se mogu zapisati matrično bez translacije nazivaju se **linearne transformacije**.

Napomena 2.13. Općenita linearna preslikavanja nazivamo **linearni operatori**, a linearne transformacije samo su njihov specijalni slučaj. Svaki linearni operator može se prikazati odgovarajućom matricom.

2.5 Zadaci za vježbu

Zadatak 2.1. Odredite djelovanje matrice A na vektor $\vec{v}$ ako vrijedi:

a) $A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = -6\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 9 \\ -7 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = 2\vec{i} + 8\vec{j} - 3\vec{k}$

c) $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & -3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = -12\vec{i} + 3\vec{j}$

d) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$

Zadatak 2.2. Odredite točke T' i T'' dobivene translacijom točke $T(2, 5, -6)$ za vektore $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ i $\vec{w} = -4\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}$

Zadatak 2.3. Odredite matricu rotacije ravnine oko ishodišta za kut α te njezino djelovanje na točku $T(6, -2)$ ako vrijedi:

a) $\alpha = 60°$

b) $\alpha = 270°$

c) $\alpha = 135°$

d) $\alpha = 240°$

Zadatak 2.4. Zapišite matricu rotacije prostora za kut $\alpha = 235°$ oko y-osi i odredite sliku točke $T(-1, -2, -1)$.

Zadatak 2.5. Odredite sliku točke $T(3, -5, 1)$ s obzirom na sljedeće transformacije:

a) centralna simetrija

b) projekcija na z-os

c) simetrija s obzirom na xy-ravninu

d) simetrija s obzirom na y-os

Poglavlje 3

Algebra matrica. Inverzna matrica. Determinanta

3.1 Matrične operacije

Definicija 3.1. Neka su $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ matrice tipa $m \times n$. **Zbroj** matrica A i B definiramo kao matricu $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

Napomena 3.2. Zbroj matrica moguće je definirati samo na matricama istog tipa.

Primjer. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 3-1 & 2+5 \\ -1-3 & 0-1 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -4 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$

Definicija 3.3. Množenje matrice $A = (a_{ij})$ skalarom λ definiramo kao matricu $\lambda A = (\lambda a_{ij})$

Primjer. $(-3)\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\cdot 2 & -3\cdot(-1) & -3\cdot 3 \\ -3\cdot 0 & -3\cdot 1 & -3\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 3 & -9 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$

Zadatak 14. Odredite $A + 2B$ za sljedeće matrice:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Rješenje. a)

$$\begin{aligned} 2B &= \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \\ A + 2B &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 & -1 & 2 \\ -4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b)

$$2B = \begin{bmatrix} 10 & 2 & -2 \\ 4 & -4 & 4 \\ -6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A + 2B = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 2 & -2 \\ 4 & -4 & 4 \\ -6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 1 & -4 \\ 5 & -2 & 6 \\ -7 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Definicija 3.4. Neka je $A = (a_{ij})$ matrica tipa $m \times n$ i $B = (b_{ij})$ matrica tipa $n \times p$. **Umnožak** matrica A i B definiramo kao matricu $C = A \times B$ tipa $m \times p$ kojoj su elementi dani s $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$.

Primjer.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-5) & 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \\ 0 \cdot (-2) - 1 \cdot (-2) + 3 \cdot (-5) & 0 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & 0 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 + 2 - 10 & 1 - 2 & 2 + 1 + 4 \\ 2 - 15 & -2 & 1 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -1 & 7 \\ -13 & -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 15. Odredite AB i BA ako je definirano za matrice

a) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Rješenje. a) $AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & 8 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 16 \end{bmatrix}$

b) $AB = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$

c) $AB = \begin{bmatrix} 4 & 19 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 7 \\ -3 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

d) $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

Napomena 3.5. Općenito za dvije matrice A i B ne vrijedi $AB = BA$.

Teorem 3.6. (Svojstva množenja matrica) Neka su A, B, C matrice. Tada vrijedi sljedeće:

a) $(AB)C = A(BC)$

b) $A(B + C) = AB + AC$

c) $(A + B)C = AC + BC$

d) $(\lambda A)B = \lambda(AB)$

e) $IA = AI = A$

Za kvadratnu matricu A možemo definirati njenu potenciju $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ puta}}$.

Primjer. Za matricu $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ odredite A^3.

Rješenje.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \\ A^2 &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \\ A^3 &= \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 7 \\ 21 & 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3.2 Primjena matrica na transformacije

Neka su A i B matrice koje odgovaraju dvjema linearnim transformacijama. Kompoziciji linearnih transformacija odgovara množenje matrica AB (prvo djeluje transformacija B, zatim A) ili BA (prvo djeluje transformacija A, zatim B).

Primjer. Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ matrica osne simetrije ravnine s obzirom na x-os i $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrica rotacije ravnine za kut od $\dfrac{\pi}{2}$.

- Matrica linearne transformacije dobivene rotacijom ravnine za kut od $\frac{\pi}{2}$, a zatim osnom simetrijom s obzirom na x-os dana je s $AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
- Matrica linearne transformacije dobivene osnom simetrijom s obzirom na x-os, a zatim rotacijom ravnine za kut od $\frac{\pi}{2}$ dana je s $BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Zadatak 16. Dokažite da je matrica kompozicija ravninskih rotacija oko ishodišta za kuteve α i β jednaka ravninskoj rotaciji za kut $\alpha + \beta$.

Rješenje. Pripadne matrice rotacija su

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo kompoziciju tako da prvo djeluje B, a zatim A, odnosno odredimo matricu AB.

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}.$$

Analogno određujemo matricu kompozicije kada prvo djeluje A, a zatim B

Zadatak 17. Na točku $(2, 2, 1)$ primijenite sljedeće transformacije prostora:

a) prostorna rotacija oko y-osi za kut $\alpha = 240°$, a zatim prostorna simetrija s obzirom na yz-ravninu

b) prostorna simetrija s obzirom na xz-ravninu, a zatim prostorna rotacija oko y-osi za kut $\alpha = 240°$.

Rješenje. Vrijedi $\sin 240° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos 240° = -\frac{1}{2}$.

Matrica rotacije oko y osi dana je s

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

a matrica prostorne simetrije s obzirom na xz-ravninu dana je s

$$S_{xz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) =$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-2-\sqrt{3}}{2} \\ 2 \\ \frac{2\sqrt{3}-1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2-\sqrt{3}}{2} \\ -2 \\ \frac{2\sqrt{3}-1}{2} \end{bmatrix}.$$

b)

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) =$$
$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2-\sqrt{3}}{2} \\ -2 \\ \frac{2\sqrt{3}-1}{2} \end{bmatrix}.$$

3.3 Determinanta

Definicija 3.7. Za matricu A tipa $n \times n$ označimo s A_{ij} matricu tipa $(n-1) \times (n-1)$ koju dobivamo iz matrice A izbacivanjem i-tog retka i j-tg stupca.

Definicija 3.8. Determinanta kvadratne matrice A je broj koji se računa Laplaceovim razvojem po nekom (i-tom) retku

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

ili po nekom (j-tom) stupcu

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Determinantu matrice A još označavamo s $|A|$.

Predznake kod razvoja determinante možemo zapamtiti pomoću sheme

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

Primjer. $|3| = 3$.

Primjer. $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 5 \cdot 1 = 8 - 5 = 3.$

Primjer. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 - 6 = -12.$

Zadatak 18. Izračunajte sljedeće determinante:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

Rješenje. a) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 8 = 13.$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 - 4 + 2 = 0$

c) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 18 = -42$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 40 - 48 + 144 = 136.$

Definicija 3.9. Matrica oblika

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

naziva se **gornje trokutasta**, a matrica oblika

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

naziva se **donje trokutasta**.

Determinantu matrice A računamo svođenjem matrice na gornje ili donje torkutastu matricu pomoću elementarnih matričnih operacija.

Definicija 3.10. Elementarne matrične operacije su:

1. zamjena dvaju redaka (stupaca)
2. množenje jednog retka (stupca) brojem različitim od 0
3. dodavanje jednok retka (stupca) pomnoženog skalarom drugom retku (stupcu)

Napomena 3.11. (Svojstva determinante)

1. Zamjenom dva retka (ili stupca) determinanta mijenja predznak
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6, \quad \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6$$
2. Determinanta se množi skalarom tako da se jedan njen redak (ili stupac) pomnoži skalarom
$$2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 10 = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$
3. Ako su svi elementi nekog retka (ili stupca) jednaki 0, determinanta je jednaka 0
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 0$$
4. Ako su determinanti dva retka (ili stupca) jednaka ili proporcionalna, determinanta je jednaka 0
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -6 \\ 1 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 0$$
5. Vrijednost determinante se ne mijenja ako se nekom retku (ili stupcu) pribroji drugi redak (stupac) pomnožen skalarom
$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ -5 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -16 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & -3 & 8 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$
6. Determinanta gornje ili donje trokutaste matrice jednaka je umnošku elemenata na dijagonali.

Primjer. Izračunajte determinantu $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ koristeći elementarne matrične operacije.

Rješenje.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot (-1) = 2$$

Zadatak 19. Izračunajte sljedeće determinante:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 6 & -9 \\ 1 & -7 & 9 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 8 & -6 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

Rješenje.

a)

$$\begin{vmatrix} -1 & 6 & -9 \\ 1 & -7 & 9 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 6 & -9 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 6 & -9 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

b)

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 8 & -6 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 5 \\ 8 & -6 & 10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 1 \\ 0 & -14 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

c)

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{19}{3} \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2) \cdot 1 \cdot (-6) \cdot \left(-\frac{19}{3}\right) = 76$$

d)

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 12 & -8 \\ 0 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 14 & -9 \\ 0 & 0 & -12 & 7 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 14 & -9 \\ -12 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -4 \cdot (98 - 108) = 40.$$

3.4 Inverz matrice

Definicija 3.12. Za kvadratnu matricu A kažemo da je **regularna** ako postoji kvadratna matrica A^{-1} takva da je

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

Matricu A^{-1} nazivamo inverz matrice A.

Teorem 3.13. Kvadratna matrica je regularna ako i samo ako vrijedi $\det(A) \neq 0$.

Primjer. Matrica $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ je regularna jer je $\det(A) = 10 \neq 0$.

Primjer. Matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ nije regularna jer je $\det(A) = 0$.

Zadatak 20. Odredite realnu vrijednost od x tako da matrica

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & x \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

bude regularna.

Rješenje.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -12 - 3 + 3x = -15 + 3x$$

Matrica je regularna ako i samo ako je $-15 + 3x \neq 0$, odnosno ako je $x \neq 5$.

Primjer. Odredite inverz matrice $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Rješenje. Označimo $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$. Tada vrijedi

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x+z & -2y+w \\ 4x+z & 4y+w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Iz toga dobivamo sljedeća dva sustava jednadžbi

$$\begin{array}{cc} -2x+z=1 & -2y+w=0 \\ 4x+z=0 & 4y+w=1 \end{array}.$$

Rješavanjem prvog sustava dobivamo $x = -\dfrac{1}{6}$ i $z = \dfrac{2}{3}$, a rješavanjem drugog $y = \dfrac{1}{6}$ i $w = \dfrac{1}{3}$. Dakle, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

Osim direktnog računa, inverz matrice određujemo pomoću adjungirane matrice.

Definicija 3.14. Neka je A matrica tipa $m \times n$. **Transponirana matrica** A^τ matrice A je matrica tipa $n \times m$ dobivena iz A zamjenom redaka sa stupcima i stupaca s redcima.

Primjer. Odredite transponiranu matricu od $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

Prvi redak $[\ -2 \ \ 1 \ \ 3\ ]$ postaje prvi stupac transponirane matrice.

Drugi redak $[\ 0 \ \ 5 \ \ -1\ ]$ postaje drugi stupac transponirane matrice.

$$A^\tau = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Definicija 3.15. Neka je A kvadratna matrica reda n. **Adjungirana matrica** $A^* = (a^*_{ij})$ matrice A je matrica za koju vrijedi $a^*_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det A^\tau_{ij}$, gdje je A^τ_{ij} matrica dobivena iz A^τ brisanjem i-tog retka i j-tog stupca.

Primjer. Odredite adjungiranu matricu od $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

$$A^\tau = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$a_{11}^* = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \quad a_{12}^* = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \quad a_{13}^* = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$a_{21}^* = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -11 \quad a_{22}^* = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \quad a_{23}^* = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7$$

$$a_{31}^* = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 17 \quad a_{32}^* = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -3 \quad a_{33}^* = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -11 & -1 & 7 \\ 17 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Definicija 3.16. Neka je A regularna matrica. Tada je njen inverz A^{-1} dan s

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*.$$

Primjer. Odredite inverz matrice $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Rješenje.

$$\det A = (-3)\cdot(-1) - 4 \cdot 1 = -1.$$

$$A^\tau = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$a_{11}^* = (-1)^{1+1} \cdot (-1) = -1, \quad a_{12}^* = (-1)^{1+2} \cdot 4 = -4,$$
$$a_{21}^* = (-1)^{2+1} \cdot 1 = -1, \quad a_{22}^* = (-1)^{2+2} \cdot (-3) = -3$$

$$A^{-1} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 21. Odredite inverz sljedećih matrica:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

Rješenje. a)

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 10$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^\tau = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$a_{11}^* = (-1)^{1+1} \cdot 3 = 3, \quad a_{12}^* = (-1)^{1+2} \cdot 4 = -4,$$
$$a_{21}^* = (-1)^{2+1} \cdot (-1) = 1, \quad a_{22}^* = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2.$$

Inverz je

$$\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

b)

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -88$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 2 \end{bmatrix}^{\tau} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 5 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$a_{11}^* = 8, \quad a_{12}^* = -8, \quad a_{13}^* = 16$$

$$a_{21}^* = -17, \quad a_{22}^* = -5, \quad a_{23}^* = -1$$

$$a_{31}^* = -5, \quad a_{32}^* = -17, \quad a_{33}^* = -21$$

Inverz je

$$-\frac{1}{88}\begin{bmatrix} 8 & -8 & 16 \\ -17 & -5 & -1 \\ -5 & -17 & -21 \end{bmatrix}.$$

Inverz matrice možemo odrediti pomoću elementarnih matričnih operacija svođenjem početne matrice na jediničnu matricu, što simbolički još zapisujemo kao

$$[A|I] \sim \cdots \sim [I|A^{-1}].$$

Primjer. Odredite inverz matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ koristeći elementarne matrične transformacije.

Rješenje.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right].$$

Zadatak 22. Odredite inverze sljedećih matrica:

a) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 2 & 11 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$

Rješenje. a)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

b)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 6 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & \frac{4}{9} & 0 & -\frac{5}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{15}{9} & 1 & -\frac{6}{9} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & \frac{4}{9} & 0 & -\frac{5}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{9} & -1 & \frac{6}{9} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{19}{9} & -1 & -\frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{9} & -1 & \frac{6}{9} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{19}{18} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{18} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & -1 & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

c)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -9 & -5 & 15 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -9 & -5 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

d)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

3.5 Zadaci za vježbu

Zadatak 3.1. Izračunajte $3A + 2B - AB$ ako je $A = \begin{bmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

Zadatak 3.2. Odredite matricu transformacije prostora dobivene tako da prvo djeluje simetrija s obzirom na x-os, a zatim rotacija oko x-osi za kut $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Primijenite dobivenu transformaciju na točku $T(-2, \sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Zadatak 3.3. Odredite matricu transformacije prostora dobivene tako da prvo djeluje rotacija oko z-osi za kut $\alpha = \pi$, a zatim centralna simetrija. Primijenite dobivenu transformaciju na točku $T(-\sqrt{2}, 3, -1)$.

Zadatak 3.4. Izračunajte sljedeće determinante:

a) $\begin{vmatrix} 7 & -1 & -5 \\ 2 & 12 & 4 \\ -4 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & -2 & 5 \\ 3 & 9 & -3 & 1 \\ -6 & 6 & -3 & 8 \end{vmatrix}$

Zadatak 3.5. Odredite inverz sljedećih matrica:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -3 & 6 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Poglavlje 4

Skalarni, vektorski i mješoviti produkt vektora

4.1 Skalarni produkt

Definicija 4.1. Skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiran je s

$$a \cdot b = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Specijalno, za $\vec{a} = \vec{b}$ dobivamo $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0° = |\vec{a}|^2$

Teorem 4.2. (Svojstva skalarnog produkta) Neka su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ vektori i λ skalar. Tada vrijedi sljedeće

a) $\vec{a}^2 \geq 0$

b) $\vec{a}^2 = 0$ ako i samo ako $\vec{a} = 0$

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

d) $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

e) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Primjer. Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektori takvi da je $|\vec{a}| = 3$, $\vec{b} = |2|$ i zatvaraju kut od $30°$. Tada je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 \cdot \cos(30°) = 3\sqrt{3}.$$

Definicija 4.3. Za dva vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ kažemo da su **ortogonalna** ako vrijedi $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Zadatak 23. Odredite kut koji zatvaraju jedinični vektori $\vec{m}$ i $\vec{n}$ ako su $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ i $\vec{b} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$ međusobno ortogonalni.

Rješenje. Vrijedi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5\vec{m} \cdot \vec{m} + 6\vec{m} \cdot \vec{n} - 8\vec{n} \cdot \vec{n} = -3 + 6\vec{m} \cdot \vec{n}.$$

Budući da su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ortogonalni, vrijedi $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, stoga zajedno s prethodnom jednakošću dobivamo

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = \frac{1}{2}.$$

No također vrijedi,

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = |\vec{m}||\vec{n}| \cdot \cos\varphi = \cos\varphi.$$

Dakle, imamo

$$\cos\varphi = \frac{1}{2},$$

iz čega slijedi $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

Zadatak 24. Odredite $|\vec{a} + \vec{b}|$ ako je $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$ i $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$.

Rješenje.

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$
$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Zbrojimo li prethodne dvije jednakosti, dobivamo

$$\begin{gathered}
|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 \\
|\vec{a} + \vec{b}|^2 + 900 = 242 + 1058 \\
|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 1300 - 900 \\
|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 400 \\
|\vec{a} + \vec{b}| = 20.
\end{gathered}$$

Teorem 4.4. Neka su $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ vektori. Tada vrijedi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Napomena 4.5. Kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ možemo računati formulom

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Primjer. Odredite skalarni produkt vektora $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$ i $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$ te odredite kut između njih.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= -1 \\
|a| &= \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\
|b| &= \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\
\cos\varphi &= \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{-1}{2} \\
\varphi &= \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Zadatak 25. Odredite kut između vektora $\overrightarrow{AB}$ zadanog točkama $A(1, -2, 1)$ i $B(3, -1, -1)$ te vektora $\overrightarrow{CD}$ zadanog točkama $C(4, -3, 1)$ i $D(5, -2, 2)$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \\
\overrightarrow{CD} &= \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \\
|\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{9} = 3 \\
|\overrightarrow{CD}| &= \sqrt{3} \\
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= 1 \\
\cos\varphi &= \frac{1}{3\sqrt{3}} \\
\varphi \approx 79.9043^\circ &\approx 78^\circ 54' 15''.
\end{aligned}$$

4.2 Vektorski produkt

Definicija 4.6. Vektorski produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ označavamo s $\vec{a} \times \vec{b}$ i definiramo kao vektor s modulom $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$, smjerom okomitim na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ te orijentacijom po pravilu desne ruke.

Teorem 4.7. (Svojstva vektorskog produkta)

a) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$

b) $\vec{a} \times \vec{a} = 0$

c) $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

d) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Napomena 4.8. Vrijedi sljedeće:

1. $\vec{i} \times \vec{i} = 0$, $\vec{j} \times \vec{j}$, $\vec{k} \times \vec{k} = 0$
2. $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$.

Teorem 4.9. Neka su $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$. Tada vrijedi sljedeće:

a)
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

b) $\vec{a}$, $\vec{b}$ su kolinearni $\Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$.

Primjer. Izračunajte vektorski produkt vektora $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ i $\vec{b} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$.

Rješenje.
$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix} &= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(4 + 10) - \vec{j}(-12 + 4) + \vec{k}(15 + 2) \\ &= 14\vec{i} + 8\vec{j} + 17\vec{k}.\end{aligned}$$

Zadatak 26. Izračunajte vektorski produkt $\vec{a} = -2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$ i $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

Rješenje.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & -3 & -1\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=7\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k}.$$

Zadatak 27. Odredite jesu li vektori $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ i $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$ kolinearni.

Rješenje.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -3\end{vmatrix}=2\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}.$$

Vektori nisu kolinearni.

Napomena 4.10. Ako je zadan paralelogram $ABCD$, onda je njegova površina jednaka

$$P=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|.$$

Zadatak 28. Neka je $ABCD$ paralelogram zadan trima točkama $A(1,2,3)$, $B(2,-3,1)$ i $C(2,-2,-3)$. Odredite njegovu površinu.

Rješenje.

$$\overrightarrow{AB}=\vec{i}-5\vec{j}-2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\vec{j}-4\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -5 & -2\\ 0 & 1 & -4\end{vmatrix}=18\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$$

$$P=|18\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}|=\sqrt{341}.$$

4.3 Mješoviti produkt vektora

Definicija 4.11. **Mješoviti produkt** vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ definiramo kao vektor $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

Definicija 4.12. Za tri vektora kažemo da su **komplanarni** ako leže na paralelnim ravninama.

Teorem 4.13. Neka su $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ i $\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$. Tada vrijedi sljedeće:

a)

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

b) $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su komplanarni $\Leftrightarrow (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$.

Primjer. Odredite mješoviti produkt vektora $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{k}$.

Rješenje.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1.$$

Zadatak 29. Odredite mješoviti produkt vektora $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$.

Rješenje.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

Zadatak 30. Odredite jesu li vektori $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 4\vec{j} - 7\vec{k}$ komplanarni.

Rješenje.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 0.$$

Vektori su komplanarni.

Napomena 4.14. Ako je paralelepiped određen vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, onda je njegov volumen jednak

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

Zadatak 31. Odredite volumen paralelepipeda određenog vektorima $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

Rješenje.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -20$$

$$P = |-20| = 20.$$

4.4 Zadaci za vježbu

Zadatak 4.1. Odredite skalarni produkt i kut između vektora $\vec{a} = -5\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ i $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}$

Zadatak 4.2. Neka su $A(3,-4,5)$, $B(2,1,8)$ i $C(5,7,-2)$ vrhovi torkuta ABC. Odredite kutove u tom trokutu.

Zadatak 4.3. Izračunajte vektorski produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ako vrijedi:

a) $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$
$\vec{b} = -\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$

b) $\vec{a} = 5\vec{i} + \vec{j}$
$\vec{b} = -7\vec{i} + 3\vec{k}$

Zadatak 4.4. Odredite jesu li vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni ako vrijedi:

a) $\vec{a} = -11\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}$
$\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$

b) $\vec{a} = 4\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$
$\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$

Zadatak 4.5. Izračunajte površinu paralelograma $ABCD$ ako vrijedi:

a) $A(-4,2,1)$, $B(-2,5,3)$ i $C(1,1,4)$

b) $B(4,2,-1)$, $C(3,2,1)$ i $D(7,-3,-2)$

Zadatak 4.6. Odredite jesu li vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni ako vrijedi:

a) $\vec{a} = 3\vec{i} - 8\vec{j} + \vec{k}$
$\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$
$\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}$

b) $\vec{a} = -3\vec{i} + 7\vec{j} - 2\vec{k}$
$\vec{b} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$
$\vec{c} = 5\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

Zadatak 4.7. Odredite volumen paralelepipeda određenog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ ako vrijedi:

a) $\vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$
$\vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$
$\vec{c} = -4\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$

b) $\vec{a} = 9\vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$
$\vec{b} = -\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}$
$\vec{c} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$

Poglavlje 5

Linearni sustavi i njihovo rješavanje

Sustav linearnih jednadžbi od m jednadžbi s n nepoznanica zapisujemo kao

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

Linearni sustav još zapisujemo u matričnom obliku $A\vec{x} = \vec{b}$, pri čemu je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Sustav također zapisujemo u obliku proširene matrice

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right],$$

Primjer. Zapišite sustav

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 2 \\ -2x & + & 2y & + & z & = & -3 \end{array}\right.$$

u matričnom obliku i u obliku proširene matrice.

Rješenje.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix},$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

Napomena 5.1. Sustav linearnih jednadžbi može imati

1. jedno jedinstveno rješenje (regularni sustav)
2. beskonačno mnogo rješenja
3. ni jedno rješenje.

5.1 Regularni sustavi

Definicija 5.2. Regularni linearni sustav je linearni sustav s jednakim brojem jednadžbi i nepoznanica čija je matrica sustava regularna.

Rješenje regularnog sustava $A\vec{x} = \vec{b}$ dano je s $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

Zadatak 32. Odredite je li sustav

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ x + 2y - z = 1 \\ -4x + 4y + z = 1 \end{cases}$$

regularan i odredite njegovo rješenje.

Rješenje.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 27 \neq 0.$$

Sustav je regularan.

Zadatak 33. Riješite sustav

$$\begin{cases} -x + y + z = 3 \\ x + z = 2 \\ x + 2y - z = 1. \end{cases}$$

Rješenje. Pronađimo inverz matrice sustava.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{array}\right].$$

Imamo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{11}{6} \end{bmatrix},$$

dakle

$$x = \frac{1}{6}, \quad y = \frac{4}{3}, \quad z = \frac{11}{6}.$$

Teorem 5.3. Neka je $A\vec{x} = \vec{b}$ regularni sustav. Tada je $x_1 = \dfrac{D_1}{D}$, $x_2 = \dfrac{D_2}{D}, \ldots, x_n = \dfrac{D_n}{D}$, gdje je $D = \det A$, a D_i je determinanta matrice A u kojoj je i-ti stupac zamijenjen s $\vec{b}$, za $i = 1, \ldots, n$,

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & b_2 \ldots & a_{2n} \\ & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & \ldots & b_m \ldots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Način rješavanja linearnog sustava metodom iz prethodnog teorema nazivamo **Cramerova metoda**.

Primjer. Riješite sustav Cramerovom metodom

$$\begin{cases} -3x + y = 5 \\ 2x - 3y = -8. \end{cases}$$

Rješenje.

$$D = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 7, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} = -7, \quad D_2 = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = 14,$$

$$x = -\frac{7}{7} = -1, \quad y = \frac{14}{7} = 2.$$

Zadatak 34. Riješite sustav Cramerovom metodom

$$\begin{cases} x + 2y - z + u = -1 \\ 2x + 5y - z + 2u = -2 \\ 3x - y - 2z + u = 5 \\ x - y + 3z - 5u = 6 \end{cases}$$

Rješenje.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -34, \quad D_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -68$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 34, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -34$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

$$x = \frac{D_1}{D} = 2, \quad y = \frac{D_2}{D} = -1, \quad z = \frac{D_3}{D} = 1, \quad u = \frac{D_4}{D} = 0.$$

5.2 Gauss-Jordanova metoda

Linearne sustave možemo rješavati i pomoću elementarnih matričnih operacija svođenjem početne matrice na jediničnu matricu, što simbolički još zapisujemo kao

$$[A|\vec{b}] \sim \cdots \sim [I|A^{-1}\vec{b}].$$

Tu metodu nazivamo **Gauss-Jordanova metoda**.

Primjer. Gauss-Jordanovom metodom riješite sustav

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \\ 4x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$$

Rješenje.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 4 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Rješenje sustava je $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$.

Primjer. Gauss-Jordanovom metodom riješite sustav

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ \qquad 2x_2 - 8x_3 = 4. \end{cases}$$

Rješenje.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Označimo $x_3 = t$, za $t \in \mathbb{R}$. Rješenje sustava je $x_1 = -1 + t$, $x_2 = 2 + 4t$.

Primjer. Gauss-Jordanovom metodom riješite sustav

$$\begin{cases} 5x_1 - 7x_2 + 9x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ \qquad 3x_2 - 6x_3 = 8. \end{cases}$$

Rješenje.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -7 & 9 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 5 & -7 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 5 \\ 0 & 3 & -6 & 8 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Sustav nema rješenja jer vrijedi $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 = 3$

Zadatak 35. Gauss-Jordanovom metodom riješite sljedeće sustave:

a) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 11 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 16 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -7 \end{cases}$

Rješenje. a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & -2 & -7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & -7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & 12 \\ 0 & 4 & -3 & -13 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & -3 & -13 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

$x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$.

b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 11 \\ 3 & -1 & 5 & 16 \\ 1 & 2 & -4 & -7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -7 \\ 2 & -3 & 5 & 11 \\ 3 & -1 & 5 & 16 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -7 \\ 0 & -7 & 17 & 37 \\ 0 & -7 & 13 & 25 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -7 \\ 0 & -7 & 17 & 37 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -7 \\ 0 & -7 & 17 & 37 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -7 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

$x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Zadatak 36. Gauss-Jordanovom metodom riješite sljedeće sustave:

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -6 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 12 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

Rješenje. a)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & -6 \\ -2 & 1 & 1 & 4 & 12 \\ 5 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -6 \\ -2 & 1 & 1 & 4 & 12 \\ 5 & -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -12 \\ 0 & 3 & 3 & 6 & 18 \\ 0 & -6 & -3 & -2 & -14 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -6 & -3 & -2 & -14 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 15 & -2 & 58 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 15 & -2 & 58 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 13 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$, $x_4 = 1$.

b)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & -2 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & -2 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$x_1 = -2,\ x_2 = 3,\ x_3 = -2,\ x_4 = 1.$

5.3 Zadaci za vježbu

Zadatak 5.1. Riješite sljedeće sustave Cramerovom metodom:

a) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 = -1 \\ 7x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 15x_4 = -32 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

Zadatak 5.2. Riješite sljedeće sustave:

a) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 5x_2 - 6x_3 - 3x_4 = 11 \\ 7x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -23 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = -8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 7 \\ -2x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -5 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 7 \end{cases}$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & - & x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -1 \\ -2x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -3x_1 & + & 11x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & -1 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 19 \\ -x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & - & 6x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \end{array}\right.$

Poglavlje 6

Funkcije

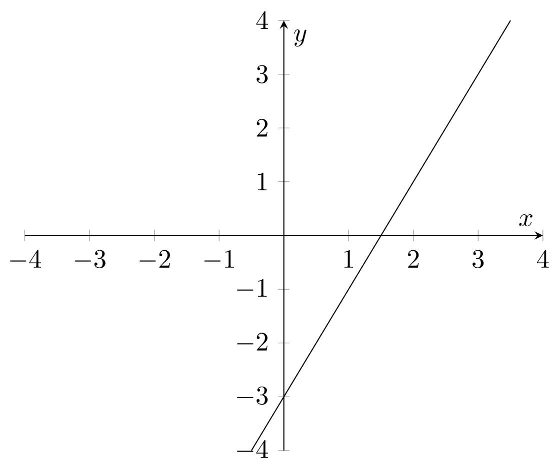
Definicija 6.1. **Funkcija** sa skupa X u skup Y je pravilo koje svakom $x \in X$ (argument) pridružuje točno jedan $y \in Y$ (vrijednost). Tada pišemo $f \colon X \to Y$, $x \overset{f}{\mapsto} y$ ili $y = f(x)$. Skup $\mathcal{D}_f = X$ nazivamo **domena** funkcije f, a skupa $\mathcal{K}_f = Y$ nazivamo **kodomena** funkcije f.

Definicija 6.2. Najveći mogući skup realnih brojeva koje funkcija može primiti kao argument nazivamo **prirodna domena**. Skup svih vrijednosti koje funkcija može primiti nazivamo **slika** ili **rang** i označavamo s $\mathcal{R}_f$.

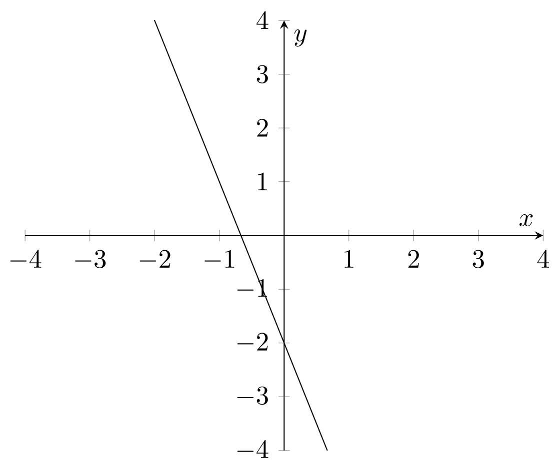
Definicija 6.3. Graf funkcije f je skup točaka ravnine $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$.

6.1 Elementarne funkcije

1. Linearne funkcije: $f(x) = ax + b$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{K}_f = \mathbb{R}$.

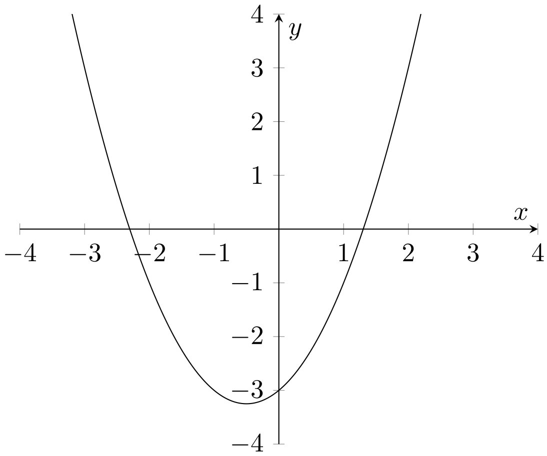


$f(x) = 2x - 3$

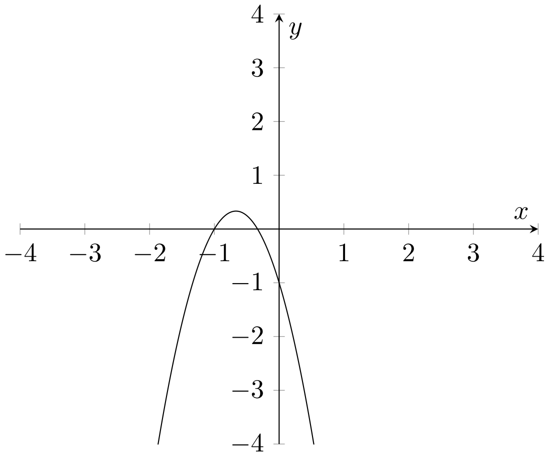


$f(x) = -3x - 2$

2. Kvadratne funkcije: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{K}_f = \mathbb{R}$.

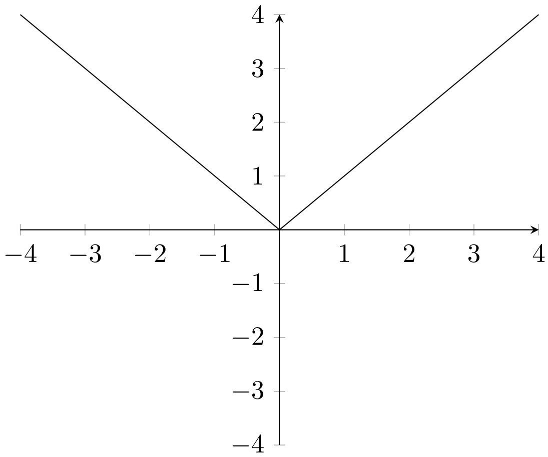


$f(x) = x^2 + x - 3$



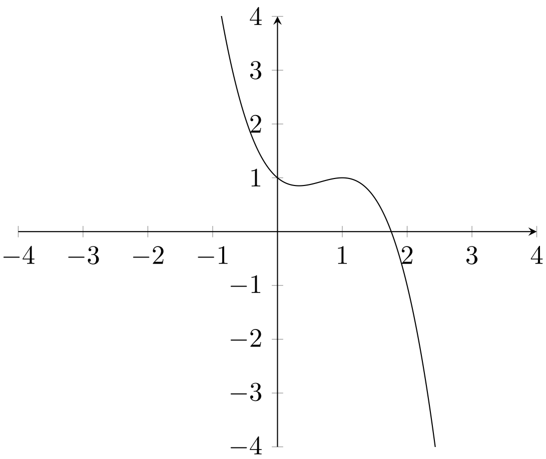
$f(x) = -3x^2 - 4x - 1$

3. Apsolutna vrijednost: $f(x) = |x|$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{K}_f = [0, \infty\rangle$.



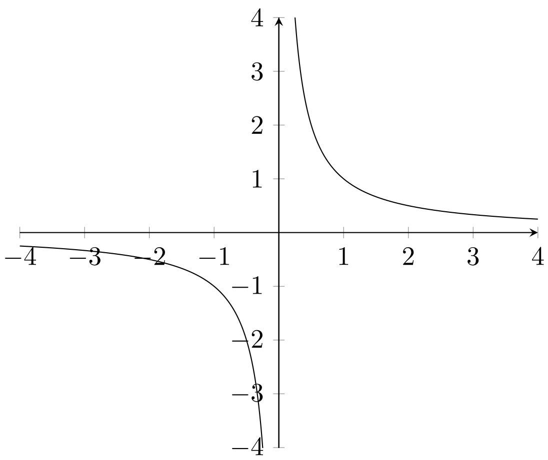
$f(x) = |x|$

4. Polinomi: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \cdots + a_1 x + a_0$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{K}_f = \mathbb{R}$.

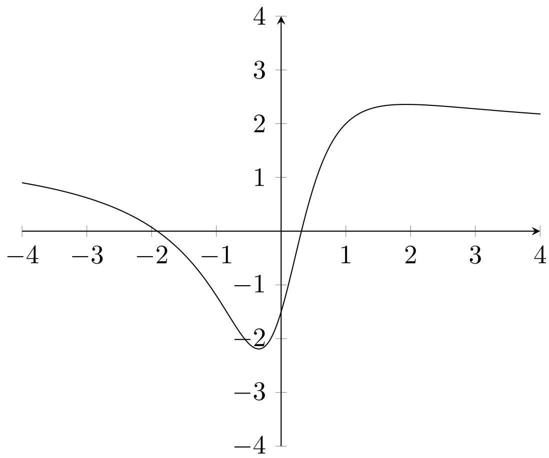


$f(x) = -3x^3 + 2x^2 - x + 1$

5. Racionalne funkcije: $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, gdje su P i Q polinomi, $\mathcal{D}_f = \{x \mid Q(x) \neq 0\}$, $\mathcal{K}_f = \mathbb{R}$.



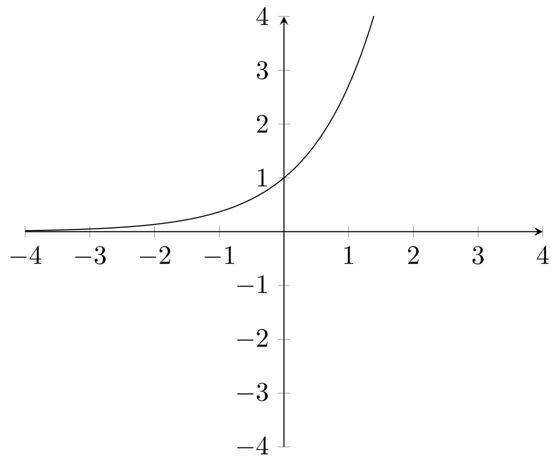
$f(x) = \dfrac{1}{x}$



$f(x) = \dfrac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2}$

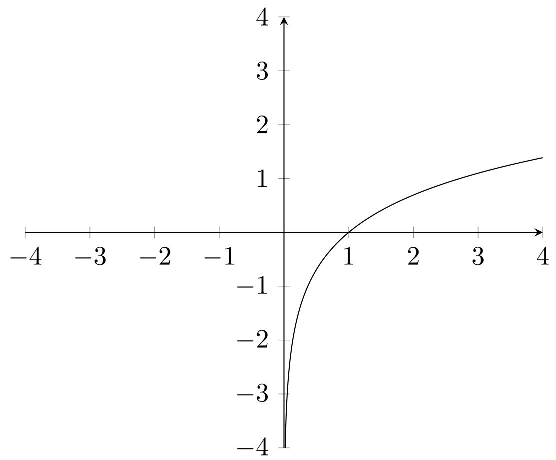
6. Korijeni: $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, ako je n neparan, $\mathcal{D}_f = [0, \infty\rangle$, ako je n paran, $\mathcal{K}_f = \mathbb{R}$.

7. Eksponencijalna funkcija: $f(x) = a^x$, gdje je $a > 0$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{K}_f = \langle 0, \infty\rangle$.



$f(x) = e^x$

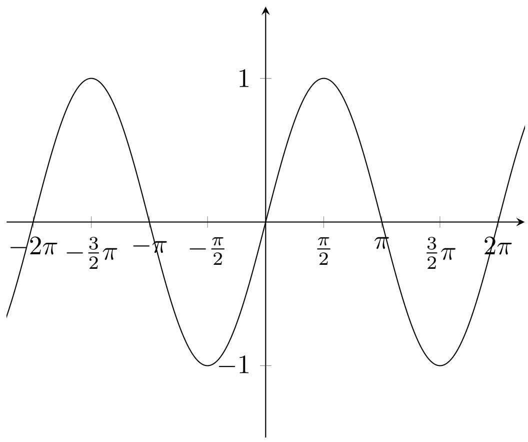
8. Logaritamska funkcija: $f(x) = \log_a(x)$, gdje je $a > 0$ i $a \neq 1$, $\mathcal{D}_f = \langle 0, \infty \rangle$, $\mathcal{K}_f = \mathbb{R}$.



$f(x) = \ln x$

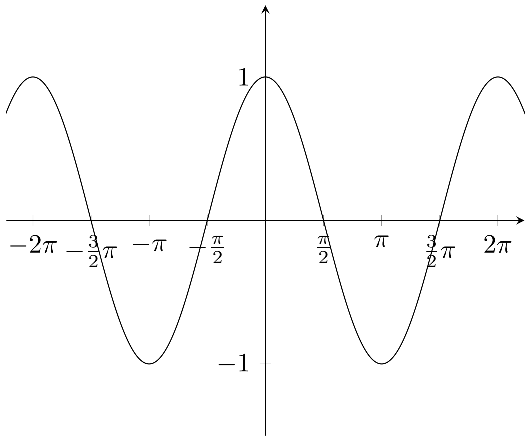
9. Trigonometrijske funkcije:

   (a) $f(x) = \sin x$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{K}_f = [-1, 1]$.



$f(x) = \sin x$

(b) $f(x) = \cos x$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{K}_f = [-1, 1]$.



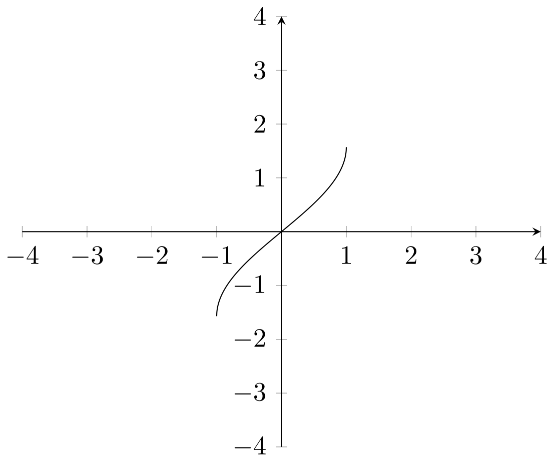
$f(x) = \cos x$

(c) $f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{N}\}$, $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}$.

(d) $f(x) = \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{N}\}$, $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}$

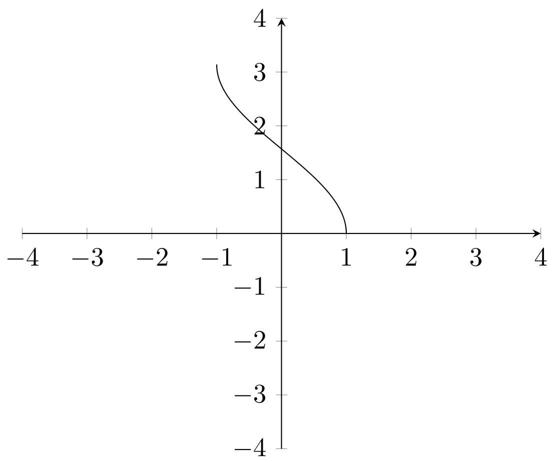
10. Arkus funkcije:

(a) $f(x) = \arcsin x$, $\mathcal{D}_f = [-1, 1]$, $\mathcal{K}_f = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.



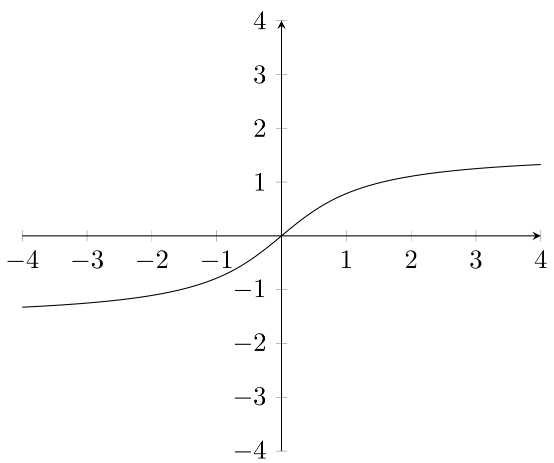
$f(x) = e^x$

(b) $f(x) = \arccos x$, $\mathcal{D}_f = [-1, 1]$, $\mathcal{K}_f = \langle 0, \pi\rangle$.



$f(x) = e^x$

(c) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{K}_f = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$.



$f(x) = e^x$

(d) $f(x) = \operatorname{arcctg} x$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{K}_f = \langle 0, \pi \rangle$.

Primjer. Odredite $f(-1)$, $f(0)$ i $f(2)$ za $f(x) = x^2 + 2x - 5$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 5 = 1 - 2 - 5 = -6 \\ f(0) &= 0^2 + 2 \cdot 0 - 5 = 0 + 0 - 5 = -5 \\ f(2) &= 2^2 + 2 \cdot 2 - 5 = 4 + 4 - 5 = 3. \end{aligned}$$

Zadatak 37. Odredite:

a) $f(-2)$ za $f(x) = \dfrac{2x+3}{-1+x}$

b) $f(0)$ za $f(x) = \operatorname{arctg}(x+1)$

c) $f(1)$ za $f(x) = \dfrac{x-3}{5^{x+1}}$

d) $f(4)$ za $f(x) = \ln(x-3) + \ln(2\sqrt{x})$.

Rješenje. a) $f(-2) = \dfrac{2 \cdot (-2) + 3}{-1 - 2} = \dfrac{-1}{-3} = \dfrac{1}{3}$

b) $f(0) = \operatorname{arctg}(0+1) = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$

c) $f(1) = \dfrac{1-3}{5^{1+1}} = \dfrac{-2}{5^2} = -\dfrac{2}{25}$

d) $f(4) = \ln(4-3) + \ln(2 \cdot 2) = \ln 1 + \ln 4 = 0 + \ln 4 = \ln 4$.

Primjer. Skicirajte u koordinatnoj ravnini grafove sljedećih funkcija:

a) $f(x) = -3x + 2$

b) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

c) $f(x) = |1 - 2x| + 1$.

Zadatak 38. Skicirajte u koordinatnoj ravnini grafove sljedećih funkcija:

a) $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$

b) $f(x) = 3^{x+2}$

c) $f(x) = \sin(x) - 1$

d) $f(x) = \ln(x+1) - 1$.

Definicija 6.4. Kažemo da je x_0 nultočka funkcije f ako vrijedi $f(x_0) = 0$.

Primjer. Odredite nultočke funkcije $f(x) = x^2 - 3x - 4$.

Rješenje. Rješavamo kvadratnu jednadžbu $x^2 - 3x - 4 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

Rješenja su stoga $x_1 = \dfrac{3+5}{2} = 4$, $x_2 = \dfrac{3-5}{2} = -1$.

Zadatak 39. Odredite nultočke sljedećih funkcija:

a) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+4x+4}$ b) $f(x) = \log_2(x^2+2x-2)$ c) $f(x) = \sin(2x+1)$

d) $f(x) = |e^x - 2|$ e) $f(x) = \sqrt[4]{1-x^3}$ f) $f(x) = \arcsin(\ln(x+2))$

Rješenje. a) $\dfrac{x-2}{x^2+4x+4} = 0 \Leftrightarrow x - 2 \Leftrightarrow x = 2.$

b) $\log_2(x^2 + 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$

c) $\sin(2x+1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi - 1}{2}, k \in \mathbb{Z}$

d) $|e^x - 2| = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

e) $\sqrt[4]{1-x^3} = 0 \Leftrightarrow 1 - x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$

f) $\arcsin(\ln(x+2)) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+2) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = e^0 \Leftrightarrow x + 2 = 1 \Leftrightarrow x = -1.$

6.2 Kompozicija funkcija

Definicija 6.5. Neka su $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$ funkcije. Tada definiramo funkciju $h\colon X \to Z$ formulom $h(x) = g(f(x))$. Kažemo da je funkcija h kompozicija funkcija f i g te pišemo $h = g \circ f$.

Teorem 6.6. Neka su f, g i h funkcije. Tada vrijedi $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Primjer. Odredite kompoziciju funkcija $h = g \circ f$ ako je $f(x) = |x - 3|$ i $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

Rješenje. $h(x) = g(f(x)) = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{|x-3|}$.

Zadatak 40. Odredite funkciju $h = g \circ f$ ako su:

a) $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = \sin x$ b) $f(x) = \ln(x - 1)$ i $g(x) = \arcsin x$

c) $f(x) = x^2 + 2x + 2$ i $g(x) = e^x$ d) $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ i $g(x) = \sin x + \ln x$.

e) $f(x) = 5^{x^2}$ i $g(x) = 2x - 3$

f) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ i $g(x) = \dfrac{2}{x+1}$

g) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{3-x}$ i $g(x) = |x-1|$

h) $f(x) = \ln x$ i $g(x) = -x^2 - 3x + 2$.

Rješenje. a) $h(x) = \sin(f(x)) = \sin(\sqrt{x})$

b) $h(x) = \arcsin(f(x)) = \arcsin(\ln(x-1))$

c) $h(x) = e^{f(x)} = e^{x^2+2x+2}$

d) $h(x) = \sin(f(x)) + \ln(f(x)) = \sin(\operatorname{tg}(x)) + \ln(\operatorname{tg}(x))$

e) $h(x) = 2f(x) - 3 = 2 \cdot 5^{x^2} - 2$

f) $h(x) = \dfrac{2}{f(x)+1} = \dfrac{2}{\operatorname{arctg}(x)+1}$

g) $h(x) = |f(x) - 1| = \left|\dfrac{x^2+1}{3-x} - 1\right| = \left|\dfrac{x^2+x-2}{3-x}\right|$

h) $h(x) = -f(x)^2 - 3 \cdot f(x) + 2 = -(\ln x)^2 - 3 \cdot \ln x + 2$

Zadatak 41. Zapišite funkciju h kao kompoziciju pripadnih funkcija ako je:

a) $h(x) = \ln^2 x + 2\ln x - 3$.

b) $h(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\ln x}{2x+2}\right)$

c) $h(x) = \sqrt[3]{\arcsin x}$

d) $h(x) = e^{\sin^2 x + \sin x + 1}$

Rješenje. a) $f(x) = \ln x$, $g(x) = x^2 + 2x - 3$, $h = g \circ f$

b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{2x+2}$, $g(x) = \operatorname{arctg}(x)$, $h = g \circ f$

c) $f(x) = \ln x$, $g(x) = x^2 + 2x - 3$, $h = g \circ f$

d) $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2 + x + 1$, $k(x) = e^x$, $h = k \circ (g \circ f)$.

6.3 Prirodna domena i slika funkcije

Primjer. Odredite prirodnu domenu funkcije $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$.

Rješenje. Razlomak nije definiran ako mu je nazivnik jednak 0. Stoga mora vrijediti $x + 3 \neq 0$, iz čega slijedi $x \neq -3$. Dakle, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Primjer. Odredite prirodnu domenu funkcije $f(x) = \sqrt{x+5}$.

Rješenje. Drugi korijen nije definiran ako je izraz pod korijenom negativan. Stoga mora vrijediti $x+5 \geq 0$, iz čega slijedi $x \geq -5$. Dakle, $\mathcal{D}_f = [-5, \infty\rangle$.

Zadatak 42. Odredite prirodne domene sljedećih funkcija

a) $f(x) = \dfrac{x^2+5x-3}{x^3+2x^2-3x}$ b) $f(x) = \sqrt[4]{1-\sqrt{x+1}}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{|x|-2}$

d) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ e) $f(x) = \arccos(2x)$ f) $f(x) = \sqrt[3]{\ln(x^2-4)}$

g) $f(x) = \dfrac{3x}{\ln(x+1)}$ h) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ i) $f(x) = \sqrt[4]{x^2+4x+3}$

j) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x - \cos x}$ k) $f(x) = \operatorname{arctg}(\ln x)$ l) $f(x) = e^{\arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right)}$.

Rješenje. a) $x^3+2x^2-3x \neq 0 \Leftrightarrow x(x^2+2x-3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -3$.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 1\}$

b) $1-\sqrt{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow x+1 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$ i

$x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

$\mathcal{D}_f = \langle -\infty, 0] \cap [-1, \infty\rangle = [-1, 0]$

c) $|x|-2 \neq 0 \Leftrightarrow x-2 \neq 0$ i $-x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ i $x \neq -2$.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

d) $x \neq 0$.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

e) $-1 \leq 2x \leq 1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{1}{2}$.

$\mathcal{D}_f = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$

f) $x^2-4 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow x < -2$ ili $x > 2$.

$\mathcal{D}_f = \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$

g) $\ln(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x+1 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$ i

$x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

$\mathcal{D}_f = \langle -1, 0\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle$

h) $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

i) $x^2+4x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ i $x \geq -1$

$\mathcal{D}_f = \langle -\infty, -3] \cup [-1, \infty\rangle$

j) $\sin x - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \cos x \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

k) $x > 0.$

$\mathcal{D}_f = \langle 0, \infty \rangle$

l) $-1 \leq \dfrac{x}{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \dfrac{x}{x+1}$ i $\dfrac{x}{x+1} \leq 1$

$-1 \leq \dfrac{x}{x+1} \Leftrightarrow \big(x \geq -\frac{1}{2}$ i $x > -1\big)$ ili $\big(x \leq -\frac{1}{2}$ i $x < -1\big) \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{1}{2}$ ili $x < -1.$

$\dfrac{x}{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1.$

$x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1.$

$\mathcal{D}_f = \langle -\infty, -1 \rangle$

Primjer. Odredite slike sljedećih funkcija:

a) $f(x) = 2x^2 + 5x - 1$

b) $f(x) = -3x^2 - x + 2$

Rješenje. a) Parabola ima otvor prema gore i tjeme joj je $T = (-\frac{5}{4}, -\frac{33}{19})$, stoga je $\mathcal{R}_f = [-\frac{33}{19}, +\infty]$.

b) Parabola ima otvor prema dolje i tjeme joj je $T = (-\frac{1}{6}, \frac{25}{12})$, stoga je $\mathcal{R}_f = [-\infty, \frac{25}{12}]$.

6.4 Injektivnost, surjektivnost i bijektivnost

Definicija 6.7. Neka je $f\colon X \to Y$ funkcija. Kažemo da je

a) f injekcija ako za svaki $y \in Y$ postoji najviše jedan $x \in X$ takav da je $f(x)$.

b) f surjekcija ako za svaki $y \in Y$ postoji najmanje jedan $x \in X$ takav da je $f(x) = y$.

c) f bijekcija ako postoji točno jedan $y \in Y$ takav da je $f(x) = y$.

Napomena 6.8. 1. Funckija f je injekcija ako vrijedi:

- $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

2. Funkcija f je surjekcija ako vrijedi $\mathcal{K}_f \subseteq \mathcal{R}_f$.

Primjer. Dokažite da je funkcija $f(x) = x$ injektivna.

Rješenje. Pretpostavimo da postoje različiti x_1, x_2 takvi da vrijedi $f(x_1) = f(x_2)$. Po definiciji funkcije sada dobivamo $x_1 = f(x_1) = f(x_2) = x_2$, iz čega slijedi $x_1 = x_2$, odnosno f je injekcija.

Zadatak 43. Provjerite injektivnost sljedećih funkcija:

a) $f(x) = 3$

b) $f(x) = 2x + 1$

c) $f(x) = 3x^2 + 1$

d) $f(x) = x^3$

e) $f(x) = e^{-3x+1}$

f) $f(x) = 2\sin(2x)$.

Rješenje.

a) Za $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$ imamo $f(x_1) = f(x_2)$, ali ne vrijedi $x_1 = x_2$. Dakle, f nije injekcija.

b) Pretpostavimo da vrijedi $f(x_1) = f(x_2)$. Tada imamo

$$2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

iz čega slijedi da je f injekcija.

c) Za $x_1 = 1$ i $x_2 = -1$ imamo $f(x_1) = f(x_2)$, ali ne vrijedi $x_1 = x_2$. Dakle, f nije injekcija.

d) Pretpostavimo da vrijedi $f(x_1) = f(x_2)$. Tada imamo

$$x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

iz čega slijedi da je f injekcija.

e) Pretpostavimo da vrijedi $f(x_1) = f(x_2)$. Tada imamo

$$e^{-3x_1+1} = e^{-3x_2+1} \Leftrightarrow -3x_1 + 1 = -3x_2 + 1 \Leftrightarrow -3x_1 = -3x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

iz čega slijedi da je f injekcija.

f) Za $x_1 = 0$ i $x_2 = \pi$ vrijedi $f(x_1) = f(x_2)$, ali ne vrijedi $x_1 = x_2$. Dakle, f nije injekcija.

Zadatak 44. Ograničite domenu sljedećih funkcija tako da dobijete injektivnu funkciju:

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = |x+1|$

c) $f(x) = \cos x$.

Primjer. Dokažite da je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x) = x^3 + 1$ surjekcija.

Rješenje. Uzmimo proizvoljni $y \in \mathbb{R}$. Trebamo pronaći $x \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $f(x) = x^3 + 1 = y$. Uzmemo li $x = \sqrt[3]{y-1}$, onda dobivamo $f(x) = f(\sqrt[3]{y-1}) = \sqrt[3]{y-1}^3 + 1 = y - 1 + 1 = y$. Dakle, f je surjekcija.

Zadatak 45. Neka je $f(x) = x^2 + 1$. Odredite Y tako da $f\colon \mathbb{R} \to Y$ bude surjekcija.

Injektivnost i surjektivnost može se provjeriti i grafički.

Zadatak 46. Provjerite grafički injektivnost i surjektivnost sljedećih funkcija

a) $f(x) = x^2 + 3$

b) $f(x) = |x+1|$

c) $f(x) = x + 3$.

6.5 Inverz funkcije

Definicija 6.9. Neka je $f\colon X \to Y$ funkcija. Kažemo da je $g\colon Y \to X$ inverzna funkcija od f ako vrijedi $g(f(x)) = x$ i $f(g(y)) = y$. Tada umjesto g pišemo f^{-1}.

Teorem 6.10. Funkcija f ima inverz ako i samo ako je bijekcija.

Zadatak 47. Odredite inverze sljedećih funkcija:

a) $f(x) = 3 - x$ b) $f(x) = 2x + 1$ c) $f(x) = 3x^2$

d) $f(x) = -2x^3$ e) $f(x) = \sqrt{x+1}$ f) $f(x) = \sqrt[5]{2x+3}$.

Poglavlje 7

Limes funkcije

Definicija 7.1. Neka je $f\colon X \to Y$ i $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Kažemo da f ima **limes u** c jednak L ako za svaki niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elemenata iz X vrijedi

$$x_n \to c \Rightarrow f(x_n) \to L.$$

Tada pišemo $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$.

Primjer. a) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 = \infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ ne postoji.

Možemo definirati limes zdesna $\lim\limits_{x\to c+} f(x)$ i limes slijeva $\lim\limits_{x\to c-} f(x)$.

Primjer. a) $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Napomena 7.2. Neka su f i g funkcije i $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Ako postoji $\lim\limits_{x\to c} g(x) = L$ i f je neprekidna u L, onda vrijedi $\lim\limits_{x\to c} f(g(x)) = f(\lim\limits_{x\to c} g(x))$.

Zadatak 48. Odredite sljedeće limese:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x-3}{x^3+x+4}$

b) $\lim_{x\to 2} \cos(\pi x)$

c) $\lim_{x\to -2} \ln(2x+7)$

d) $\lim_{x\to 1} \operatorname{arctg} x$.

Rješenje. a) $\lim_{x\to 0} \frac{x-3}{x^3+x+4} = \frac{0-3}{0^3+0+4} = \frac{-3}{4}$

b) $\lim_{x\to 2} \cos(\pi x) = \cos(2\pi) = 1$

c) $\lim_{x\to -2} \ln(2x+7) = \ln(-2\cdot 2+7) = \ln(3)$

d) $\lim_{x\to 1} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$

Teorem 7.3. (Svojstva limes) Neka su f i g funkcije koje imaju limese u točki c. Tada vrijedi:

a) $\lim_{x\to c}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$

b) $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x)$

c) $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}, \quad \lim_{x\to c} g(x) \neq 0$

d) $\lim_{x\to c}(f(x))^\alpha = (\lim_{x\to c} f(x))^\alpha, \quad$ za $\alpha > 0$.

Tablica limesa

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(a^x-1)}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \lim_{x\to \infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \frac{a_m}{b_n} & \text{ako je } m = n \\ 0 & \text{ako je } m < n \\ \pm\infty & \text{ako je } m > n. \end{cases}$$

Zadatak 49. Odredite sljedeće limese:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^5+6x^3+1}{x^5+6}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-x^3}{x^3+x^2+x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-x^3-4}{\sqrt{x^4+1}}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+2x-5}{x^3+4x^2+1}$.

Rješenje. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^5+6x^3+1}{x^5+6} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^5\cdot(2+\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^5})}{x^5\cdot(1+\frac{6}{x^5})} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^5}}{1+\frac{6}{x^5}} = 2$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-x^3}{x^3+x^2+x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3\cdot(\frac{1}{x^3}-1)}{x^3\cdot(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3})} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{1}{x^3}-1}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}} = -1$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2\cdot(2+\frac{1}{x^2})}}{x\cdot(1+\frac{1}{x})} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\cdot\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{x\cdot(1+\frac{1}{x})} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = \sqrt{2}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-x^3-4}{\sqrt{x^4+1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3\cdot(\frac{2}{x}-1-\frac{4}{x^3})}{x^2\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\cdot(\frac{2}{x}-1-\frac{4}{x^3})}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} = \infty$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x\cdot(1+\frac{1}{x}))^2}{x^2\cdot(1+\frac{1}{x^2})} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2\cdot(1+\frac{1}{x})^2}{x^2\cdot(1+\frac{1}{x^2})} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(1+\frac{1}{x})^2}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+2x-5}{x^3+4x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2\cdot(1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2})}{x^3\cdot(1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^3})} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}{x\cdot(1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^3})} = 0$

Zadatak 50. Odredite sljedeće limese:

a) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

d) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ e) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.

Rješenje. a) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2} = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x-1}{x+2} = \dfrac{-1-1}{-1+2} = -2$

b) $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right) = \lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right) =$

$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} =$

$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x+2}{1+x+x^2} = \dfrac{1+2}{1+1+1} = 1$

c) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{x\cdot(x-2)}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{x}{(x-2)} = \infty$

d) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{\sqrt{1}+1} = \dfrac{1}{2}$

Zadatak 51. Odredite sljedeće limese:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin(2x)}{x-\sin(3x)}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

Napomena 7.4. Neka su f i g funkcije, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ i neka vrijedi $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $0 < A \leq \infty$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Limese oblika $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = C$ određujemo na sljedeći način:

i) ako je $B \in \mathbb{R}$, onda vrijedi $C = A^B$

ii) ako je $A \neq 1$ i $B = \pm\infty$, onda vrijedi $C = \begin{cases} +\infty & \text{ako je } A < 1, B = -\infty \\ 0 & \text{ako je } A < 1, B = +\infty \\ 0 & \text{ako je } A > 1, B = -\infty \\ +\infty & \text{ako je } A > 1, B = +\infty \end{cases}$

iii) ako je $A = 1$ i $B = \pm\infty$, onda je $C = e^{\lim_{x\to a}(f(x)-1)g(x)}$.

Primjer. a) $\lim\limits_{x\to -1} \left(\dfrac{1}{x+1}\right)^{x^2+2x-1} = \infty$

b) $\lim\limits_{x\to 1} (e^x + 1)^{\frac{1}{x^2+x-2}} = \infty$

c) $\lim\limits_{x\to 1} (x^2)^{\frac{1}{1-x^2}} = e^{\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{1-x^2}} = e^{-1}$.

Zadatak 52. Odredite sljedeće limese:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}\right)^{x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-3}}$ d) $\lim\limits_{x\to -2} \left(\dfrac{x+3}{2x+5}\right)^{x+1}$.

Napomena 7.5. $\lim\limits_{x\to c} \ln(f(x)) = \ln(\lim\limits_{x\to c} f(x))$.

Zadatak 53. Odredite sljedeće limese:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} (\ln(2x+1) - \ln(x+2))$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+10x)}{x}$.

Poglavlje 8

Derivacija funkcije

Definicija 8.1. Kažemo da je funkcija f **diferencijabilna** (derivabilna) u točki x_0 ako postoji limes u x_0 kvocijenta diferencija

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Taj limes zovemo derivacija funkcije f u točki x_0 i pišemo

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Teorem 8.2. (Svojstva derivacije)

a) $(f \pm g)' = f' \pm g'$

b) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g \cdot g'$

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$, $(g \neq 0)$

d) $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$

Derivaciju kompozicije još zapisujemo kao $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Tablica derivacija

$C' = 0$, $C \in \mathbb{R}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(a^x)' = a^x \ln a$
$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(e^x)' = e^x$
$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Napomena 8.3. Neka je $C \in \mathbb{R}$ konstanta i f funkcija. Tada vrijedi $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$

Primjer. Odredite derivacije sljedećih funkcija:

a) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$

b) $x \cdot e^x$

c) $f(x) = \dfrac{\pi}{x} + \ln 2$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

Rješenje. a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^5 - 4x^3 + 2x - 3)' \\ &= (x^5)' + (-4x^3)' + (2x)' + (-3)' \\ &= 5x^4 - 4 \cdot 3x^2 + 2 \\ &= 5x^4 - 12x^2 + 2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x \cdot e^x)' \\ &= x' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' \\ &= e^x + x \cdot e^x \end{aligned}$$

c)

$$f'(x) = \left(\frac{\pi}{x} + \ln 2\right)' = \left(\frac{\pi}{x}\right)' + (\ln 2)' = \pi \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'$$
$$= \pi \cdot (x^{-1})' = \pi \cdot (-1) \cdot x^{-1-1} = -\pi \cdot x^{-2} = -\frac{\pi}{x^2}$$

d)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{x+1}\right)' \\ &= \frac{x' \cdot (x+1) - x \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x+1-x}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Zadatak 54. Odredite derivacije sljedećih funkcija:

a) $f(x) = x^2 - \sqrt[3]{x^2}$ b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2-5x+5}$ c) $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

d) $f(x) = x \arcsin x$ e) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$ f) $f(x) = \sqrt{x} + x \operatorname{tg} x$

g) $f(x) = \dfrac{x^7}{5^x}$ h) $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}$ i) $f(x) = x^3 \ln x - \dfrac{x^3}{3}$.

Zadatak 55. Odredite derivacije sljedećih funkcija:

a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ b) $f(x) = \sqrt{xe^x + x}$ c) $f(x) = \ln(1+x^2)$

d) $f(x) = 3 \sin x \cos^2 x$ e) $f(x) = \operatorname{tg}^2(5x)$ f) $f(x) = e^{\sin^2 x}$

g) $f(x) = \arccos(e^x)$ h) $f(x) = \ln(\cos(x-1))$ i) $f(x) = \operatorname{arctg}(e^{x^2+2x})$.

Napomena 8.4. Moguće je računati i derivacije višeg reda: $f'' = (f')'$, $f''' = (f'')'$, $f^{iv} = (f''')'$, ...

Primjer. Odredite derivaciju trećeg reda funkcije $f(x) = x^2 e^x$.

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (x^2e^x)' \\
&= (x^2)'e^x + x^2(e^x)' \\
&= 2xe^x - x^2e^x \\
&= e^x(2x + x^2) \\
f''(x) &= (e^x(2x + x^2))' \\
&= (e^x)'(2x + x^2) + e^x(2x + x^2)' \\
&= e^x(2x + x^2) + e^x(2 + 2x) \\
&= e^x(2 + 4x + x^2) \\
f'''(x) &= (e^x(2 + 4x + x^2))' \\
&= (e^x)'(2 + 4x + x^2) + e^x(2 + 4x + x^2)' \\
&= e^x(2 + 4x + x^2) + e^x(4 + 2x) \\
&= e^x(6 + 6x + x^2)
\end{aligned}
$$

8.1 L'Hospitalovo pravilo

Teorem 8.5. (L'Hospitalovo pravilo) Neka su f i g derivabilne funkcije za koje je $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ neodređenog oblika ($\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$). Ako postoji $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, onda vrijedi

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Primjer. Odredite $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 4x + 1}{x^3 - 4x^2 + x + 2}$.

Rješenje. Imamo $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 4x + 1}{x^3 - 4x^2 + x + 2} = \dfrac{0}{0}$, stoga možemo primijeniti L'Hospitalovo pravilo.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x + 1}{x^3 - 4x^2 + x + 2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 4x - 4}{3x^2 - 8x + 1} = -\frac{3}{4}.$$

Zadatak 56. Odredite sljedeće limese:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x - 2}{\ln(3 - x)}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$.

Poglavlje 9

Tangenta na graf funkcije, linearna aproksimacija i Taylorov red

9.1 Tangenta na graf funkcije i linearna aproksimacija

Tangenta na graf funkcije f u točki x_0 dana je formulom

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Primjer. Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = e^x$ u točki $x_0 = 3$.

Rješenje. Vrijedi $f(3) = e^3$. Budući da je $f'(x) = e^x$, dobivamo $f(3) = e^3$. Stada je jednadžba tangente

$$\begin{aligned} y &= e^3 + e^3(x - 3) \\ &= e^3(1 + x - 3) \\ &= e^3(x - 2). \end{aligned}$$

Zadatak 57. Odredite jednadžbu tangente na graf funckije f u točki x_0 ako je

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$

b) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 64$

c) $f(x) = e^{x^2-1}$, $x_0 = 1$

d) $f(x) = x \cos x$, $x_0 = \pi$

e) $f(x) = \operatorname{arctg}(5 - x^2)$, $x_0 = 2$

f) $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{x^2 - x - 1}$, $x_0 = -1$.

Tangenta na graf funckije f u nekoj točki x_0 vrlo dobro aproksimira vrijednost funkcije f u točkama koje se nalaze blizu x_0. Stoga vrijednost funkcije f u točki x približno možemo izračunati sljedećom formulom:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Primjer. Približno izračunajte vrijednost izraza $\ln(1.3)$.

Rješenje. Definiramo $f(x) = \ln(x)$.

$$x = 1.3, \quad x_0 = 1.$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(1) = 1.$$

$$f(1) = 0.$$

$$\begin{aligned} f(1.3) &\approx 0 + 1 \cdot (1.3 - 1) \\ &= 0.3. \end{aligned}$$

Zadatak 58. Prbližno izračunajte vrijednosti sljedećih izraza:

a) $\sqrt{3.99}$

b) $\sqrt[3]{8.02}$

c) $\log_4(16.02)$

d) $\sqrt{1 + \sqrt[3]{27.3}}$

e) $\arcsin(0.2)$

f) $e^{\sqrt{9.1}-1}$.

9.2 Taylorov red

Definicija 9.1. Za prirodni broj n definiramo n **faktorijel** $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. Konvencija: $0! = 1$.

Definicija 9.2. Za niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiramo niz parcijalnih suma $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$. Ako postoji $\lim\limits_n s_n$, onda taj limes nazivamo **suma reda** i označavamo s $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Ako je funkcija f beskonačno mnogo puta derivabilna u točki x_0, onda možemo definirati red potencija

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Taj reda nazivamo **Taylorov red** funkcije f oko točke x_0.

Primjer. Odredite Taylorov red funkcije $f(x) = e^x$ u točki $x_0 = 0$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= e^x & f'(0) &= 1 \\ &\vdots & &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= e^x & f^{(n)}(0) &= 1. \end{aligned}$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{1!}(x-0) + \frac{1}{2!}(x-0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Zadatak 59. Odredite Taylorove redove oko točke $x_0 = 0$ sljedećih funkcija.

a) $f(x) = e^{x/3}$

b) $f(x) = 3^x$

c) $f(x) = \cos x$.

Napomena 9.3. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ vrijedi samo za $|x| < 1$.

Primjer. Odredite Taylorov red funkcije $f(x) = \dfrac{1}{1-3x}$ u točki $x_0 = 0$.

Rješenje. 1. način: direktno.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-3x} & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{3}{(1-3x)^2} & f'(0) &= 3 \\ f''(x) &= \frac{18}{(1-3x)^3} & f''(0) &= 18 \\ f'''(x) &= \frac{162}{(1-3x)^4} & f'''(0) &= 162 \\ &\vdots & &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= \frac{3^n \cdot n!}{(1-3x)^{n+1}} & f^{(n)}(0) &= 3^n \cdot n!. \end{aligned}$$

$$f(x) = 1 + \frac{3}{1!}(x-0) + \frac{18}{2!}(x-0)^2 + \frac{162}{3!}(x-0)^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n.$$

2. način: zamjenom varijabli.

$$t = 3x,$$
$$f(t) = \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n.$$

Zadatak 60. Odredite Taylorov red funkcije $f(x) = \dfrac{-7}{5+2x}$ u točki $x_0 = 0$.

Napomena 9.4. Taylorov red funckije $\dfrac{1}{1-x}$ može se koristiti za računanje sume određenih redova. Neka je red oblika $S = a(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots)$. Ako vrijedi $|q| < 1$, onda je njegova suma $S = \dfrac{a}{1-q}$.

Zadatak 61. Odredite sume sljedećih redova:

a) $S = \dfrac{3}{2} - \dfrac{9}{4} + \dfrac{27}{8} - \dfrac{81}{16} + \ldots$

b) $S = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{25} + \dfrac{1}{125} - \dfrac{1}{625} + \ldots$

Poglavlje 10

Pad, rast, lokalni ekstremi, konveksnost, konkavnost i točke infleksije

10.1 Intervali monotonosti i lokalni ekstremi

Definicija 10.1. Kažemo da funkcija f

a) **raste** ako vrijedi $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

b) **pada** ako vrijedi $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Teorem 10.2. Funkcija f je rastuća (padajuća) na intervalu $\langle x_1, x_2\rangle$ ako je $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$) za sve x_0 iz tog intervala.

Za zadanu funkciju f, nultočke prve derivacije $f'(x) = 0$ nazivaju se **stacionarne točke** i dijele domenu na intervale monotonosti.

Primjer. Odredite intervale monotonosti funkcije $f(x) = x^3 - 3x$

Rješenje.

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$$

$\langle -\infty, -1\rangle$	$\langle -1, 1\rangle$	$\langle 1, \infty\rangle$
$f'(-2) = 9 > 0$	$f'(0) = -3 < 0$	$f'(2) = 9 > 0$
$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Funkcija f raste na intervalima $\langle -\infty, -1\rangle$ i $\langle 1, \infty\rangle$, a pada na intervalu $\langle -1, 1\rangle$.

Zadatak 62. Odredite intervale monotonosti funkcije $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + 4$.

Definicija 10.3. Neka je f funkcija. Kažemo da je x_0 lokalni maksimum (minimum) ako postoji interval $\langle a, b\rangle$ kojem pripada točka x_0 takav da je $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$ i $f(x) > f(x_0)$ $(f(x) < f(x_0))$ za sve $x \in \langle a, b\rangle$.

Teorem 10.4. Funkcija f ima lokalni maksimum (minimum) u točki x_0 ako postoje intervali $\langle a, x_0\rangle$ i $\langle x_0, b\rangle$ takvi da je $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ za $x \in \langle a, x_0\rangle$ i $f'(x) < 0$ $(f'(x) > 0)$ za $x \in \langle x_0, b\rangle$.

Primjer. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x) = x^2 + 6x - 1$

Rješenje.

$$f'(x) = 2x + 6.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow x = -3.$$

$\langle -\infty, -3\rangle$	$\langle -3, \infty\rangle$
$f'(-4) = -2 < 0$	$f'(0) = 6 > 0$
$\searrow$	$\nearrow$

Funkcija f u točki $(-3, -10)$ ima lokalni mininmum.

Zadatak 63. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x) = \dfrac{x^5}{3} - \dfrac{x^3}{3}$

Najveće i najmanje vrijednosti funkcije f na zadanom zatvorenom intervalu $[a, b]$ postižu se ili na rubovima ili u stacionarnim točkama.

Primjer. Odredite najveću i najmanju vrijednost funkcije $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$ na intervalu $[-3, 2]$.

Rješenje.

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1.$$

$$f(-3) = 8, \quad f(2) = 3, \quad f(-2) = 19, \quad f(1) = -8.$$

Funkcija postiže najveću vrijednost u točki $(-2, 19)$.

Zadatak 64. Odredite najveću i najmanju vrijednost funkcije $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ na intervalu $[-2, 0]$.

10.2 Asimptote, intervali konkavnosti, konveksnosti i točke infleksije

Definicija 10.5. Asimptota funkcije f je pravac čija udaljenost od grafa funkcije teži nuli.

Određivanje asimptota

1. **Vertikalna asimptota**: pravac $x = c$, gdje je c točka prekida.
2. **Horizontalna asimptota**: pravac $y = b$, gdje je

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \text{ ili } \lim_{x\to\infty} f(x) = b$$

3. **Kosa asimptota**: pravac $y = ax + b$, gdje je

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ i } b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax).$$

Primjer. Odredite asimptote funkcije $f(x) = \dfrac{1}{x-3} + 4$.

Rješenje. Kosa asimptota:

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x-3} + 4}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x - 11}{x^2 - 3x} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x-3} + 4 \right) = 4,$$

Kosa asimptota je pravac $y = 4$.

Vertikalna asimptota: točka prekida funkcije f nalazi se u $x = 3$, stoga je taj pravac vertikalna asimptota.

Primjer. Odredite asimptote funkcije $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Rješenje. Kose asimptote:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x \cdot (x^2 - 1)} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0,$$

Kosa asimptota je pravac $y = 0$.

Vertikalna asimptota: točke prekida nalaze se u točkama $x = 1$ i $x = -1$, stoga su ti pravci vertikalne asimptote.

Primjer. Odredite asimptote funkcije $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$.

Rješenje. Kose asimptote:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x \cdot (e^x - 1)} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0,$$

Prva kosa asimptota je pravac $y = 0$.

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x \cdot (e^x - 1)} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x - 1} = -1,$$

Druga kosa asimptota je pravac $y = -1$.

Vertikalna asimptota: točka prekida nalazi se u točki $x = 0$, stoga je taj pravac vertikalna asimptota.

Primjer. Odredite asimptote funkcije $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 3}$.

Rješenje. Kose asimptote:

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x - 3} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x - 2}{x - 3} = 2,$$

Kosa asimptota je $y = x + 2$.

Vertikalne asimptote: Točka prekida nalazi se u točki $x = 3$, stoga je taj pravac točka prekida.

Definicija 10.6. Kažemo da je funkcija f

a) **konveksna** ako

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

b) **konkavna** ako

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

Teorem 10.7. Funkcija f je konveksna (konkavna) na intervalu $\langle x_1, x_2\rangle$ ako je $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$) za sve x_0 iz tog intervala.

Točke u kojima je $f''(x) = 0$ dijele domenu funkcije na intervale konveksnosti i konkavnosti.

Definicija 10.8. Točka u kojoj funkcija prelazi iz konveksnosti u konkavnost (i obrnuto) nazivamo **točka infleksije**.

Primjer. Odredite intervale konveksnosti i konkavnosti te točke infleksije funkcije $f(x) = x^3 - x$.

Rješenje.

$$f'(x) = 3x^2 - 1.$$

$$f''(x) = 6x.$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$\langle -\infty, 0\rangle$	$\langle 0, \infty\rangle$
$f''(-1) = -6 < 0$	$f'(1) = 6 > 0$
konkavna	konveksna

Točka $(0, 0)$ je točka infleksije funkcije f.

Zadatak 65. Odredite intervale monotonosti, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti i konkavnosti te točke infleksije funkcije $f(x) = e^{-x^2}$.

Zadatak 66. Odredite intervale monotonosti, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti i konkavnosti te točke infleksije funkcije $f(x) = 1 + \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

10.3 Ispitivanje toka funkcije

Ispitivanje toka funkcije f.

1. Odrediti $\mathcal{D}_f$.

2. Odrediti nultočke.

3. Odrediti asimptote.

4. Odrediti stacionarne točke

5. Odrediti rast/pad i lokalne ekstreme.

6. Odrediti konveksnotst/konkavnost i točke infleksije.

7. Nacrtati graf.

Zadatak 67. Ispitajte tok funkcije $f(x) = x^3 e^{x^2}$ i nacrtajte njen graf.

Zadatak 68. Ispitajte tok funkcije $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ i nacrtajte njen graf.

Zadatak 69. Ispitajte tok funkcije $f(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x}$ i nacrtajte njen graf.

Zadatak 70. Ispitajte tok funkcije $f(x) = x\sqrt{x+3}$ i nacrtajte njen graf.

Rješenja zadataka

1.1. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

1.2. $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$**,**

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$**,**

$\overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$

1.3. $\overrightarrow{CC_1} = -\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$

$C_1(1,1,1)$

1.4. $y_1 = 6$**,** $\quad y_2 = 0$

1.5. a) NE b) NE c) DA d) NE

1.6. a) $\vec{d} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

b) $\vec{d} = \vec{a} - 3\vec{b} - 2\vec{c}$

c) $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$

d) $\vec{d} = -4\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c}$

2.1. a) $\begin{bmatrix} 38 \\ -31 \end{bmatrix}$, **b)** $\begin{bmatrix} -41 \\ -12 \end{bmatrix}$, **c)** $\begin{bmatrix} -45 \\ 6 \\ -45 \end{bmatrix}$, **d)** $\begin{bmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix}$

2.2. $T'(4,2,-2)$**,** $\quad T''(-2,10,-1)$

2.3. a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3}-1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3-3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3}+1 \end{bmatrix}$

2.4 $\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

2.5. a) $(-3,5,-1)$, **b)** $(0,0,1)$, **c)** $(-3,5,1)$ **d)** $(3,5,1)$

3.1. $\begin{bmatrix} -26 & -22 & 8 \\ -20 & 5 & 32 \\ 11 & 8 & 12 \end{bmatrix}$

3.2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix}$

3.3. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

3.4. a) 216 **b)** 0 **c)** 34 **d)** -69

3.5. a) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & \frac{1}{20} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$, **b)** $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{13}{9} & 2 \\ -\frac{1}{6} & \frac{8}{9} & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{7}{9} & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, **d)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$

4.1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$, $\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{3}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{74}}$

4.2. $\cos \sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{32}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{174}}$,

$\cos \sphericalangle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{3}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{145}}$,

$\cos \sphericalangle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \dfrac{142}{\sqrt{174} \cdot \sqrt{145}}$

4.3. a) $-8\vec{i} + 3\vec{j} + 10\vec{k}$, **b)** $3\vec{i} - 15\vec{j} + 7\vec{k}$

4.4. a) NE, b) DA

4.5. a) $P = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| = \sqrt{426}$, **b)** $P = |\overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{BC}| = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$

4.6. a) NE, b) NE

4.7. a) $V = 94$, **b)** $V = 279$

5.1. **a)** $x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1,$

b) $x_1 = -\frac{2}{5},\ x_2 = \frac{6}{5},\ x_3 = \frac{17}{5},\ x_4 = 1,$

c) $x_1 = -3,\ x_2 = 0,\ x_3 = -\frac{1}{2},\ x_4 = \frac{2}{3},$

d) $x_1 = 2,\ x_2 = -3,\ x_3 = -\frac{3}{2},\ x_4 = \frac{1}{2}$

5.2. **a)** $x_1 = -5,\ x_2 = 4,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1,$

b) $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1,$

c) $x_1 = -3,\ x_2 = 5,\ x_3 = -1,\ x_4 = 4,$

d) $x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2,\ x_4 = 2$

Dodaci

Dodatak A

Logika i teorija skupova

A.1 Logika sudova

Definicija A.1. Sud je svaka izjavna rečenica kojoj se može pridružiti istinosna vrijednost: istina 1 i laž 0.

Primjer. a) $3 + 5 = 8$ je sud.

b) „Rijeka Sava prolazi kroz Zagreb” je sud.

c) „Mars je veći od Sunca” je sud.

d) „Koliko je sati?” nije sud.

Sve istinosne vrijednosti nekog suda P možemo prikazati u **tablici istinitosti**.

P
0
1

Negaciju suda P označavamo s $\neg P$ i čitamo „ne P”.

P	$\neg P$
1	0
0	1

Konjunkciju dvaju sudova P i Q označavamo s $P \wedge Q$ i čitamo „P i Q”.

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Disjunkciju dvaju sudova P i Q označavamo s $P \vee Q$ i čitamo „P ili Q".

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Implikaciju dvaju sudova P i Q označavamo s $P \Rightarrow Q$ i čitamo „ako P, onda Q" ili „Q slijedi iz P" ili „P povlači Q", ...

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Ekvivalenciju dvaju sudova P i Q označavamo s $P \Leftrightarrow Q$ i čitamo „P je ekvivalentno s Q".

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Primjer. Odredite tablicu istinitosti suda $P \wedge (Q \Rightarrow (P \vee \neg Q))$

Rješenje.

P	Q	$\neg Q$	$P \vee \neg Q$	$Q \Rightarrow (P \vee \neg Q)$	$P \wedge (Q \Rightarrow (P \vee \neg Q))$
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0

Kažemo da je sud tautologija ako je uvijek istinit.

Primjer. Pokažite da je $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ tautologija.

Rješenje.

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

A.2 Teorija skupova

Skup je kolekcija elemenata. Činjenicu da je a element skupa A označavamo s $a \in A$. Skupove prikazujemo navođenjem elemenata $\{a, b, c, \ldots\}$ ili ga određujemo nekim svojstvom P, $\{x \mid P(x)\}$.

Primjer. Skup svih prirodnih brojeva strogo manjih od 7 možemo prikazati kao $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$.

Definicija A.2.

1. Univerzalni skup je „najveći" skup koji promatramo. Često ga označavamo s U.
2. Prazni skup je skup bez elemenata i označavamo ga s $\emptyset$.

Definicija A.3. Kažemo da je A podskup od B i pišemo $A \subseteq B$ ako je svaki element od A ujedno i element od B. Ako vrijedi $A \subseteq B$ i $A \neq B$, onda još pišemo $A \subset B$.

Definicija A.4. (Skupovne operacije) Neka su A i B skupovi. Definiramo sljedeće skupovne operacije.

a) Unija skupova: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.

b) Presjek skupova: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

c) Skupovna razlika: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$.

d) Komplement: $A^c = \{x \mid x \notin A\} = U \setminus A$, gdje je U univerzalni skup.

e) Partitivni skup: $\mathscr{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$.

f) Kartezijev produkt: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

Primjer. Neka je $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ univerzalni skup. Odredite uniju, presjek, skupovnu razliku i kartezijev produkt skupova $A = \{1, 3, 7\}$ i $B = \{2, 10, 7, 4\}$. Odredite $\mathscr{P}(A)$ i B^c.

Rješenje. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 10\}$.

$A \cap B = \{7\}$.

$A \setminus B = \{1, 3\}$.

$A \times B = \{(1,2),(1,10),(1,7),(1,4),(3,2),(3,10),(3,7),(3,4),(7,2),(7,10),(7,7),(7,4)\}.$

$\mathscr{P}(A) = \{\emptyset, A, \{1\}, \{3\}, \{7\}, \{1,3\}, \{1,7\}, \{3,7\}\}.$

$B^c = U \setminus B = \{1,3,5,6,8,9,10\}.$

Dodatak B

Trigonometrija

α (u stupnjevima)	α (u radijanima)	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$0°$	0	0	1	0	nedefinirano
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	nedefinirano	0

Trigonometrijski identiteti

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos(x)$$

$$\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\sin(x)$$