Poglavlje 1

Neodređeni integral i metode računanja

1.1 Primitivna funkcija

Postupak dobivanja neodređenog integrala obrnut je postupku dobivanja derivacije funkcije. Ako je zadana funkcija f, pitamo se što je potrebno derivirati kako bi se upravo ona dobila kao rezultat deriviranja.

Definicija 1.1.1. Za $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ funkciju $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ takvu da vrijedi $F'(x) = f(x)$, za svaki $x \in \langle a, b\rangle$, zovemo **primitivna funkcija**.

Primjer 1.1.2. Primitivne funkcije od $f(x) = 2x$ su $F(x) = x^2$, $F(x) = x^2 + 5$, $F(x) = x^2 + \pi$ itd.
Prema tome, zaključujemo da je primitivna funkcija funkcije $f(x)$ bilo koja funkcija oblika $F(x) = x^2 + C, C \in \mathbb{R}$.

Definicija 1.1.3. Skup svih primitivnih funkcija od f nazivamo **neodređeni integral** te označavamo s $\displaystyle\int f(x)\,dx := \{F(x)|F'(x) = f(x),\ \text{za svaki } x \in \langle a, b\rangle\}$.

Zadatak 1.1.4. Odredite sve primitivne funkcije od $f(x)$ ako je

a) $f(x) = x^3$, b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, c) $f(x) = e^x$, d) $f(x) = x$, e) $f(x) = \frac{1}{x}$.

Rješenje.
Pitamo se koju funkciju trebamo derivirati da bismo dobili funkciju $f(x)$.

a) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$, $C \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow F(x) = 2x^{\frac{1}{2}} + C$, $C \in \mathbb{R}$

c) $F(x) = e^x + C,\ C \in \mathbb{R}$

d) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C,\ C \in \mathbb{R}$

e) $F(x) = \ln x + C,\ C \in \mathbb{R}$

Kako ne bismo ubuduće morali tražiti skup primitivnih funkcija na način na koji smo to radili u prošlom zadatku, zapisujemo tablicu integrala koja sadrži integrale elementarnih funkcija. Dostupna je na linku.

Teorem 1.1.5. Svojstva integrala

a) $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\ dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$ **aditivnost(A)**

b) $\displaystyle\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx, \text{za } \alpha \in \mathbb{R},$ **homogenost(H)**

c) $\displaystyle\int f'(x)\,dx = f(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$

Zadatak 1.1.6. Odredite neodređene integrale:

a) $\displaystyle\int \left(x^2 + x + 1\right)\ dx,$ b) $\displaystyle\int \left(\sqrt{x} + \cos x\right)\ dx,$ c) $\displaystyle\int (1 + 2\cos x)\ dx,$
d) $\displaystyle\int \left(2x^2 + 1\right)^3\ dx.$

Rješenje.

a)

$$\int \left(x^2 + x + 1\right)\ dx \overset{A}{=} \int x^2\,dx + \int x\,dx + \int 1\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

b)

$$\int \left(\sqrt{x} + \cos x\right)\ dx \overset{A}{=} \int \sqrt{x}\,dx + \int \cos x\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx + \int \cos x\,dx =$$
$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \sin x + C = \frac{2}{3}\sqrt{x}^3 + \sin x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

c)

$$\int (1 + 2\cos x)\ dx \overset{A}{=} \int 1\,dx + \int 2\cos x\,dx \overset{H}{=} \int 1\,dx + 2\int \cos x\,dx =$$
$$= x + 2\sin x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

d)

$$\begin{aligned}\int \left(2x^2+1\right)^3\,dx &= \int \left(8x^6+12x^4+6x^2+1\right)\,dx = \\ &\stackrel{AiH}{=} 8\int x^6\,dx + 12\int x^4\,dx + 6\int x^2\,dx + \int 1dx = \\ &= \frac{8}{7}x^7 + \frac{12}{5}x^5 + 2x^3 + x + C,\ C\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Primjer 1.1.7. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C,\ C\in\mathbb{R}$

Zašto?

Za $x>0$ imamo $(\ln x + C)' = \frac{1}{x}$.

Za $x<0$ imamo $(\ln(-x)+C)' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$.

1.2 Metode rješavanja neodređenih integrala

- metoda supstitucije

- metoda parcijalne integracije

1.2.1 Metoda supstitucije

Primjer 1.2.1. Odrediti sljedeće integrale:

a) $\int \frac{1}{x+2}\,dx,$ b) $\int \frac{1}{2x+1}\,dx.$

Kod integrala pod a) naslućujemo da bi se moglo raditi o $\ln(x+2)$. Ako deriviramo $\ln(x+2)$, vidimo da dobijemo isto što piše pod znakom integrala. Uzmemo li u obzir prethodni primjer, rješenje je jednako $\ln|x+2| + C,\ C\in\mathbb{R}$. Kod integrala pod b), vodimo li se istom idejom, naslućujemo da je u pitanju $\ln(2x+1)$. No, ovaj se put u derivaciji izraza $\ln(2x+1)$ javlja konstanta 2 koje nema kod podintegralne funkcije. Kako bi se ta konstanta poništila, primitivna funkcija mora sadržavati $1/2$, tj. rješenje je $\frac{1}{2}\ln|2x+1| + C,\ C\in\mathbb{R}$. Kako ne bismo kod zadataka ovakvog tipa "pogađali" rješenje, koristimo metodu supstitucije.

Zadatak 1.2.2. Odredite integrale:

a) $\int \frac{1}{x+2}\,dx,$ b) $\int \frac{1}{2x+1}\,dx.$

Rješenje.

a)

$$\int \frac{1}{x+2}\,dx = \int \frac{1}{x+2}\,dx = \begin{bmatrix} t = x+2 \\ dt = dx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C =$$
$$= \ln|x+2| + C,\ C \in \mathbb{R}$$

b)

$$\int \frac{1}{2x+1}\,dx = \int \frac{1}{2x+1}\,dx = \begin{bmatrix} t = 2x+1 \\ dt = 2dx \\ dx = \frac{dt}{2} \end{bmatrix} = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Teorem 1.2.3. Formula supstitucije u integralu

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = \begin{bmatrix} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)\,dx \end{bmatrix} = \int f(t)\,dt$$

Zadatak 1.2.4. Riješite metodom supstitucije:

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$, b) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$, c) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos x\,dx$.

Rješenje.

a)

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \begin{bmatrix} t = e^x+1 \\ dt = e^x\,dx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C = \ln|e^x+1| + C =$$
$$= \ln(e^x+1) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

b)

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \begin{bmatrix} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}\,dx \end{bmatrix} = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}\ln^2 x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

c)

$$\int \sin^3 x\cos x\,dx = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{bmatrix} = \int t^3\,dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4}\sin^4 x + C, C \in \mathbb{R}$$

Zadatak 1.2.5. Riješite metodom supstitucije:

a) $\int \left(2x^2+1\right)^{46} x\,dx$, b) $\int x\sqrt{2-5x}\,dx$, c) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-3x}}\,dx$, d) $\int x\sqrt{2-5x^2}\,dx$.

Rješenje.

a)

$$\int \left(2x^2+1\right)^{46} x\,dx = \begin{bmatrix} t=2x^2+1 \\ dt=4x\,dx \\ dx=\frac{1}{4}\,dt \end{bmatrix} = \int t^{46}\,\frac{1}{4}\,dt = \frac{1}{4}\int t^{46}\,dt = \frac{1}{4}\frac{t^{47}}{47}+C =$$
$$= \frac{1}{188}(2x^2+1)^{47}+C,\ C\in\mathbb{R}$$

b)

$$\int x\sqrt{2-5x}\,dx = \begin{bmatrix} t=2-5x \Rightarrow x=\frac{-t+2}{5} \\ dt=-5\,dx \\ dx=-\frac{1}{5}\,dt \end{bmatrix} = \int \frac{-t+2}{5}\sqrt{t}\cdot\left(-\frac{1}{5}\,dt\right) = \frac{1}{25}\int (t-2)\sqrt{t}\,dt =$$
$$= \frac{1}{25}\int\left(t\sqrt{t}-2\sqrt{t}\right)\,dt = \frac{1}{25}\int\left(t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}\right)\,dt =$$
$$= \frac{1}{25}\left(\int t^{\frac{3}{2}}\,dt - 2\int t^{\frac{1}{2}}\,dt\right) = \frac{1}{25}\left(\frac{2}{5}t^{\frac{2}{5}} - 2\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)+C =$$
$$= \frac{1}{25}\left(\frac{2}{5}\sqrt{t}^{5} - \frac{4}{3}\sqrt{t}^{3}\right)+C = \frac{1}{25}\left(\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}^{5} - \frac{4}{3}\sqrt{2-5x}^{3}\right)+C,\ C\in\mathbb{R}$$

c)

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-3x}}\,dx = \begin{bmatrix} t=1-3x \Rightarrow x=\frac{1-t}{3} \\ dt=-3\,dx \\ dx=-\frac{1}{3}\,dt \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{1-t}{3}}{\sqrt[3]{t}}\cdot\left(-\frac{1}{3}\,dt\right) = \int \frac{1-t}{3t^{\frac{1}{3}}}\cdot\left(-\frac{1}{3}\,dt\right) =$$
$$= -\frac{1}{9}\int\frac{1-t}{t^{\frac{1}{3}}}\,dt = -\frac{1}{9}\left(\int t^{-\frac{1}{3}}\,dt - \int\frac{t}{t^{\frac{1}{3}}}\right) = -\frac{1}{9}\left(\int t^{-\frac{1}{3}}\,dt - \int t^{\frac{2}{3}}\,dt\right) =$$
$$= -\frac{1}{9}\left(\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}}\right)+C = -\frac{1}{9}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1-3x)^2} - \frac{3}{5}\sqrt[3]{(1-3x)^5}\right)+C =$$
$$= -\frac{1}{6}\sqrt[3]{(1-3x)^2} + \frac{1}{15}\sqrt[3]{(1-3x)^5}+C,\ C\in\mathbb{R}$$

d)

$$\int x\sqrt{2-5x^2}\,dx = \begin{bmatrix} t=2-5x^2 \\ dt=-10x\,dx \\ x\,dx=-\frac{1}{10}\,dt \end{bmatrix} = \int\sqrt{t}\cdot\left(-\frac{1}{10}\,dt\right) = -\frac{1}{10}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt = -\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C =$$
$$= -\frac{1}{15}\sqrt{2-5x^2}^{3}+C,\ C\in\mathbb{R}$$

Zadatak 1.2.6. Riješite metodom supstitucije:

$$\text{a)}\ \int e^{3\cos x}\sin x\,dx, \qquad \text{b)}\int \frac{2^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx, \qquad \text{c)}\int x^2 e^{x^3}\,dx.$$

Rješenje.

a)

$$\int e^{3\cos x}\sin x\,dx = \begin{bmatrix} t = 3\cos x \\ dt = -3\sin x\,dx \\ \sin x\,dx = -\frac{1}{3}\,dt \end{bmatrix} = \int e^t \cdot \left(-\frac{1}{3}\,dt\right) = -\frac{1}{3}\int e^t\,dt = -\frac{1}{3}e^t + C =$$
$$= -\frac{1}{3}e^{3\cos x} + C,\ C \in \mathbb{R}$$

b)

$$\int \frac{2^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx = \begin{bmatrix} t = \operatorname{arctg} x \\ dt = \frac{1}{1+x^2}\,dx \end{bmatrix} = \int 2^t\,dt = \frac{2^t}{\ln 2} + C = \frac{1}{\ln 2}2^{\operatorname{arctg} x} + C,\ C \in \mathbb{R}$$

c)

$$\int x^2 e^{x^3}\,dx = \begin{bmatrix} t = x^3 \\ dt = 3x^2\,dx \\ x^2\,dx = \frac{1}{3}\,dt \end{bmatrix} = \int e^t \cdot \frac{1}{3}\,dt = \frac{1}{3}\int e^t\,dt = \frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Zadatak 1.2.7. Riješite integrale:

$$\text{a)}\ \int 3^x e^x\,dx, \qquad \text{b)}\int \left(1+\sqrt{x}\right)^4\,dx, \qquad \text{c)}\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}.$$

Rješenje.

a)

$$\int 3^x e^x\,dx = \int (3e)^x\,dx = \frac{(3e)^x}{\ln(3e)} + C,\ C \in \mathbb{R}$$

b)

$$\int \left(1+\sqrt{x}\right)^4\,dx = \begin{bmatrix} t = 1+\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = t-1 \\ dt = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,dx \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \Rightarrow dx = 2(t-1)\,dt \end{bmatrix} = \int t^4 \cdot 2(t-1)\,dt =$$
$$= 2\int \left(t^5 - t^4\right)\,dt = 2\left(\int t^5\,dt - \int t^4\,dt\right) = \frac{1}{3}t^6 - \frac{2}{5}t^5 + C =$$
$$= \frac{1}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^6 - \frac{2}{5}\left(1+\sqrt{x}\right)^5 + C,\ C \in \mathbb{R}$$

c)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\, dx =$$
$$= \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{(x+1)-(x-1)}\, dx = \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\, dx =$$
$$= \int \frac{1}{2}\left(\int \sqrt{x+1}\, dx - \int \sqrt{x-1}\, dx\right) =$$
$$= \begin{bmatrix} t = x+1 & s = x-1 \\ dt = dx & ds = dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\int t^{\frac{1}{2}}\, dt - \int s^{\frac{1}{2}}\, ds\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}\right) + C = \frac{1}{3}\sqrt{x+1}^3 - \frac{1}{3}\sqrt{x-1}^3 + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Zadatak 1.2.8. Riješite integrale:

a) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\, dx$, b) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$, c) $\displaystyle\int \frac{4}{\sin^2(2x)}\, dx$, d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$, e)* $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\, dx$.

Rješenje.

a)

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x\, dx \\ \sin x\, dx = -dt \end{bmatrix} = \int -\frac{dt}{t} = -\int \frac{1}{t}\, dt =$$
$$= -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C,\ C \in \mathbb{R}$$

b)

$$\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx =$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx - \int 1\, dx = \operatorname{tg} x - x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

c)

$$\int \frac{4}{\sin^2(2x)}\, dx = \begin{bmatrix} t = 2x \\ dt = 2\, dx \\ dx = \frac{1}{2}\, dt \end{bmatrix} = 4\int \frac{1}{\sin^2 t} \cdot \frac{1}{2}\, dt = 2\int \frac{1}{\sin^2 t}\, dt = 2 \cdot (-\operatorname{ctg} t) + C =$$
$$= -2\operatorname{ctg}(2x) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

d) 1. način

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{4\, dx}{4\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{4\, dx}{(2\sin x \cos x)^2} =$$
$$= \int \frac{4\, dx}{(\sin(2x))^2} \overset{c)}{=} -2\operatorname{ctg}(2x) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

2. način

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} &= \int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx = \\ &= \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx + \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \\ &= \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C,\ C\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

e)*

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x}\,dx &= \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,dx = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\,dx = \int \frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\,dx = \\ &= \int \frac{1}{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\,dx = \begin{bmatrix} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ dt = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\,dx \\ \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\,dx = 2\,dt\end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\cdot 2\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C,\ C\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Zadatak 1.2.9. Riješite: $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx.$

Rješenje. 1.način

Primjećujemo da je stupanj brojnika veći od stupnja nazivnika pa podijelimo najprije polinome.

$$\begin{array}{rl} & (x^2+1) \div (x-1) = x+1 \\ - & x^2 \quad -x \\ \hline & x+1 \\ - & x-1 \\ \hline & 2 \end{array}$$

Prema tome,

$$\frac{x^2+1}{x-1} = x+1+\frac{2}{x-1}.$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx &= \int\left(x+1+\frac{2}{x-1}\right)dx = \int x\,dx + \int 1\,dx + 2\int \frac{1}{x-1}\,dx = \\ &= \frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-1| + C,\ C\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

2. način

$$\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx = \begin{bmatrix} t = x+1 \Rightarrow x = t+1 \\ dt = dx \end{bmatrix} = \int \frac{(t+1)^2+1}{t}\,dt = \int \frac{t^2+2t+2}{t}\,dt =$$
$$= \int \left(t+2+\frac{2}{t}\right)dt = \frac{t^2}{2} + 2t + 2\ln|t| + C =$$
$$= \frac{(x-1)^2}{2} + 2(x-1) + 2\ln|x-1| + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Napomena 1.2.10. Naizgled rješenja nisu jednaka, no ako raspišemo neko od njih (ili oba) vidjet ćemo da se radi o istom skupu primitivnih funkcija.

Zadatak 1.2.11. Riješite sljedeće integrale:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\arcsin^2 x\sqrt{1-x^2}}$, b) $\displaystyle\int \frac{dx}{3^x+2}$, c) $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{2\sin^2 x+\cos^2 x}}\,dx$.

Rješenje.

a)

$$\int \frac{dx}{\arcsin^2 x\cdot\sqrt{1-x^2}} = \begin{bmatrix} t = \arcsin x \\ dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{t^2}\,dt = \int t^{-2}\,dt = \frac{t^{-1}}{-1} + C =$$
$$= -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\arcsin x} + C,\ C \in \mathbb{R}$$

b)

$$\int \frac{dx}{3^x+2} = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3^x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{3^x+2-3^x}{3^x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \left(\frac{3^x+2}{3^x+2} - \frac{3^x}{3^x+2}\right)dx =$$
$$= \begin{bmatrix} t = 3^x+2 \\ dt = 3^x\ln 2\,dx \\ 3^x\,dx = \frac{1}{\ln 3}\,dt \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\int 1\,dx - \int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\ln 3}\,dt\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{\ln 3}\ln|t|\right) + C = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{\ln 3}\ln|3^x+2|\right) + C =$$
$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{\ln 3}\ln(3^x+2)\right) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

c)

$$\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{2\sin^2 x+\cos^2 x}}\,dx = \int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 x+\cos^2 x}}\,dx = \int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{\sin^2 x+1}}\,dx =$$
$$= \begin{bmatrix} t = \sin^2 x+1 \\ dt = 2\sin x\cos x\,dx \\ \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\,dt \end{bmatrix} = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt =$$
$$= t^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{\sin^2 x+1} + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Zadatak 1.2.12. Riješite: $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx.$

Rješenje. 1. način

$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx = \begin{bmatrix} t = 1+\sqrt{x} \Rightarrow x = (t-1)^2 \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \\ dx = 2(t-1)\,dt \end{bmatrix} = \int \frac{1+(t-1)^2}{t}\cdot 2(t-1)\,dt =$$
$$= 2\int \frac{(t^2-2t+2)\,(t-1)}{t}\,dt = 2\int \frac{t^3-t^2-2t^2+2t+2t-2}{t}\,dt =$$
$$= 2\int \frac{t^3-3t^2+4t-2}{t}\,dt = 2\Big(\int t^2\,dt - 3\int t\,dt + 4\int dt - 2\int \frac{1}{t}\,dt\Big) =$$
$$= 2\left(\frac{t^3}{3} - 3\frac{t^2}{2} + 4t - 2\ln|t|\right) + C =$$
$$= \frac{2}{3}(1+\sqrt{x})^3 - 3(1+\sqrt{x})^2 + 8(1+\sqrt{x}) - 4\ln|1+\sqrt{x}| + C,\ C\in\mathbb{R}$$

2. način

$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \\ 2\sqrt{x}\,dt = dx \Rightarrow dx = 2t\,dt \end{bmatrix} = \int \frac{1+t^2}{1+t}\cdot 2t\,dt = 2\int \frac{t^3+t}{t+1}\,dt =$$
$$\overset{(*)}{=} 2\int \left(t^2 - t + 2 - \frac{2}{t+1}\right)dt =$$
$$= 2\left(\int t^2\,dt - \int t\,dt + \int 2\,dt - 2\int \frac{1}{t+1}\,dt\right) =$$
$$= 2\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t - 2\ln|t+1|\right) + C =$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{x}^3 - x + 4\sqrt{x} - 4\ln|\sqrt{x}+1| + C,\ C\in\mathbb{R}$$

Dijeljenje polinoma (*):

$$\begin{array}{rl} & (t^3+t) \div (t+1) = t^2 - t + 2 \\ - & t^3 \quad + t^2 \\ \hline & -t^2 + t \\ - & -t^2 - t \\ \hline & 2t \\ - & 2t + 2 \\ \hline & -2 \end{array}$$

Zadatak 1.2.13. (Zadaci s kolokvija)

Integrirajte:

a) $\displaystyle\int \left(\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x\right)\, dx$, b) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{2+\ln x}}\, dx$, c) $\displaystyle\int \frac{\cos(2x)}{1+3\sin(2x)}\, dx$.

Rješenje.

a)

$$\begin{aligned}
\int \left(\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x\right)\, dx &= \int \left(\sin^2 x + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)\, dx = \int \sin^2 x\, dx + \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \\
&= \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\, dx + \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\, dx = \\
&= \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \cos(2x)\, dx\right) + \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx - \int dx = \\
&= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right) + \operatorname{tg} x - x + C = \\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \operatorname{tg} x + C,\ C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{2+\ln x}}\, dx &= \begin{bmatrix} t = 2 + \ln x \\ dt = \frac{1}{x}\, dx \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{1}{2}}\, dt = 2t^{\frac{1}{2}} + C = \\
&= 2\sqrt{2+\ln x} + C,\ C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos(2x)}{1+3\sin(2x)}\, dx &= \begin{bmatrix} t = 1 + 3\sin(2x) \\ dt = 3\cos(2x)\cdot 2\, dx \\ \cos(2x)\, dx = \frac{1}{6}\, dt \end{bmatrix} = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{6}\, dt = \frac{1}{6}\int \frac{1}{t}\, dt = \frac{1}{6}\ln|t| + C = \\
&= \frac{1}{6}\ln|1+3\sin(2x)| + C,\ C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Trigonometrijske supstitucije

Postoje različite vrste trigonometrijskih supstitucija, no mi ćemo obraditi one najvažnije. Kod njih je ideja koristiti osnovni trigonometrijski identitet te ostale trigonometrijske formule.

1. tip:

$$\int f\left(\sqrt{k^2 - x^2}\right)\, dx = \begin{bmatrix} x = k\sin t \\ dx = k\cos t\, dt \end{bmatrix}$$

2. tip:

$$\int f\left(\sqrt{x^2-k^2}\right)\,dx = \begin{bmatrix} x = \frac{k}{\cos t} \\ dx = \frac{k\sin t}{\cos^2 t}\,dt \end{bmatrix}$$

3. tip:

$$\int f\left(\sqrt{k^2+x^2}\right)\,dx = \begin{bmatrix} x = k\,\mathrm{tg}\,t \\ dx = k\frac{1}{\cos^2 t}\,dt \end{bmatrix}$$

Zadatak 1.2.14. Koristeći trigonometrijske supstitucije, riješite integrale:

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$, c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx$.

Rješenje.

a)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{bmatrix} x = \sin t \Rightarrow t = \arcsin x \\ dx = \cos t\,dt \end{bmatrix} = \int \frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cdot\cos t\,dt = \int \frac{\sin^2 t}{\sqrt{\cos^2 t}}\cdot\cos t\,dt =$$

$$= \int \sin^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int (1-\cos(2t))\,dt = \begin{bmatrix} s = 2t \\ ds = 2\,dt \\ dt = \frac{1}{2}\,ds \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int dt - \frac{1}{2}\int \cos s\,ds\right) = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin s\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x) + C,\ C\in\mathbb{R}$$

b)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx = \begin{bmatrix} x = \frac{2}{\cos t} \Rightarrow t = \arccos\frac{2}{x} \\ dx = \frac{2\sin t}{\cos^2 t}\,dt \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{2}{\cos t}}{\sqrt{\frac{4}{\cos^2 t}-4}}\cdot\frac{2\sin t}{\cos^2 t}\,dt =$$

$$= \int \frac{\frac{2}{\cos t}}{\sqrt{\frac{4-4\cos^2 t}{\cos^2 t}}}\cdot\frac{2\sin t}{\cos^2 t}\,dt = 2\int \frac{2}{2\sqrt{1-\cos^2 t}}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt =$$

$$= 2\int \frac{1}{\cos^2 t}\,dt = 2\,\mathrm{tg}\,t + C = 2\,\mathrm{tg}\left(\arccos\frac{2}{x}\right) + C,\ C\in\mathbb{R}$$

c)

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx = \begin{bmatrix} x=\operatorname{tg} t \Rightarrow t=\operatorname{arctg} x \\ dx=\frac{1}{\cos^2 t}\,dt \end{bmatrix} = \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 t+1}}{\operatorname{tg} t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int \frac{\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}+1}}{\operatorname{tg} t\cos^2 t}\,dt =$$

$$= \int \frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}}{\frac{\sin t}{\cos t}\cos^2 t}\,dt = \int \frac{1}{\sin t\cos^2 t}\,dt = \int \frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin t\cos^2 t}\,dt =$$

$$= \int\left(\frac{\sin t}{\cos^2 t}+\frac{1}{\sin t}\right)dt = \begin{bmatrix} s=\cos t \\ ds=-\sin t\,dt \\ \sin t\,dt=-ds \end{bmatrix} = \int\frac{-ds}{s^2}+\int\frac{1}{\sin t}\,dt =$$

$$\overset{Zad.1.2.8e)}{=} -\frac{1}{s}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+C = \frac{1}{\cos t}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+C =$$

$$= \frac{1}{\cos(\operatorname{arctg} x)}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\operatorname{arctg} x}{2}\right|+C,\ C\in\mathbb{R}$$

1.2.2 Metoda parcijalne integracije

Teorem 1.2.15. Formula parcijalne integracije

$$\int u\,dv = uv-\int v\,du$$

Zadatak 1.2.16. Metodom parcijalne integracije riješite integrale:

a) $\int x\sin x\,dx$, b) $\int x\ln x\,dx$, c) $\int x\cos x\,dx$, d) $\int x^2e^x\,dx$.

Rješenje.

a)

$$\int x\cdot\sin x\,dx = \begin{bmatrix} u=x & dv=\sin x\,dx \\ du=dx & v=\int\sin x\,dx=-\cos x \end{bmatrix} =$$

$$= x\cdot(-\cos x)-\int(-\cos x)\,dx =$$

$$= -x\cos x+\int\cos x\,dx = -x\cos x+\sin x+C,\ C\in\mathbb{R}$$

b)

$$\int x\ln x\,dx = \begin{bmatrix} u=\ln x & dv=x\,dx \\ du=\frac{1}{x}\,dx & v=\int x\,dx=\frac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \ln x\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C, C\in\mathbb{R}$$

c)

$$\int x\cos x\,dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = \cos x\,dx \\ du = dx & v = \int \cos x\,dx = \sin x \end{bmatrix} = x\sin x - \int \sin x\,dx =$$
$$= x\sin x + \cos x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

d)

$$\int x^2 e^x\,dx = \begin{bmatrix} u = x^2 & dv = e^x\,dx \\ du = 2x\,dx & v = \int e^x\,dx = e^x \end{bmatrix} = x^2 e^x - \int e^x \cdot 2x\,dx =$$
$$= x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = e^x \\ du = dx & v = \int e^x\,dx = e^x \end{bmatrix} =$$
$$= x^2 e^x - 2\left(x e^x - \int e^x dx\right) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Primjer 1.2.17.

$$\int e^x \sin x\,dx = \begin{bmatrix} u = e^x & dv = \sin x\,dx \\ du = e^x\,dx & v = \int \sin x\,dx = -\cos x \end{bmatrix} =$$
$$= e^x \cdot (-\cos x) + \int \cos x \cdot e^x\,dx = \begin{bmatrix} u = e^x & dv = \cos x\,dx \\ du = e^x\,dx & v = \int \cos x\,dx = \sin x \end{bmatrix} =$$
$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int \sin x \cdot e^x\,dx$$

Ako označimo $A := e^x \sin x\,dx$, imamo:

$$A = -e^x \cos x + e^x \sin x - A$$
$$2A = e^x \sin x - e^x \cos x$$
$$A = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)\,.$$

Prema tome

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 1.2.18. Riješite integrale:

a) $\int x^2 \cos(2x)\,dx$, b) $\int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx$, c) $\int \arcsin x\,dx$, d) $\int \ln x\,dx$.

Rješenje.

a)

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cos(2x)\,dx &= \begin{bmatrix} u = x^2 & dv = \cos(2x)\,dx \\ du = 2x\,dx & v = \int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x) \end{bmatrix} = \\
&= x^2 \cdot \frac{\sin(2x)}{2} - \int \frac{\sin(2x)}{2} \cdot 2x\,dx = \frac{x^2 \sin(2x)}{2} - \int x \sin(2x)\,dx = \\
&= \begin{bmatrix} u = x & dv = \sin(2x)\,dx \\ du = dx & v = \int \sin(2x)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) \end{bmatrix} = \\
&= \frac{x^2 \sin(2x)}{2} - \left(x \cdot \left(-\frac{1}{2}\cos(2x) \right) - \int -\frac{1}{2}\cos(2x)\,dx \right) = \\
&= \frac{x^2 \sin(2x)}{2} + \frac{1}{2} x \cos(2x) - \frac{1}{2} \int \cos(2x) = \\
&= \frac{1}{2} x^2 \cos(2x) + \frac{1}{2} x \cos(2x) - \frac{1}{4} \sin(2x) + C,\ C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx &= \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg} x & dv = x^2\,dx \\ du = \frac{1}{1+x^2}\,dx & v = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} \end{bmatrix} = \\
&= \operatorname{arctg} x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3} x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3} \int \frac{x^2}{1+x^2}\,x dx = \\
&= \begin{bmatrix} t = 1 + x^2 \Rightarrow x^2 = t - 1 \\ dt = 2x\,dx \\ x\,dx = \frac{1}{2}\,dt \end{bmatrix} = \frac{1}{3} x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3} \int \frac{t-1}{t} \cdot \frac{1}{2}\,dt = \\
&= \frac{1}{3} x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6} \int \frac{t-1}{t}\,dt = \frac{1}{3} x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6} \left(\int dt - \int \frac{1}{t}\,dt \right) = \\
&= \frac{1}{3} x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6} t + \frac{1}{6} \ln|t| + C = \\
&= \frac{1}{3} x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6}(1+x^2) + \frac{1}{6} \ln(1+x^2) + C,\ C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\int \arcsin x\,dx &= \begin{bmatrix} u = \arcsin x\,dx & dv = 1\,dx \\ du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & v = \int 1\,dx = x \end{bmatrix} = \arcsin x \cdot x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \\
&= \begin{bmatrix} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x\,dx \\ x\,dx = -\frac{1}{2}\,dt \end{bmatrix} = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \\
&= x \arcsin x + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C,\ C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

d)

$$\int \ln x\,dx = \begin{bmatrix} u=\ln x & dv = 1\,dx \\ du=\frac{1}{x}\,dx & v=\int 1\,dx = x \end{bmatrix} = \ln x\cdot x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$
$$= x\ln x - x + C,\ C\in\mathbb{R}$$

Zadatak 1.2.19. (Zadaci s kolokvija)

Integrirajte:

a) $\displaystyle\int x^2\ln x\,dx$, b) $\displaystyle\int\frac{x+4}{\cos^2 x}\,dx$, c) $\displaystyle\int(3-x)e^x\,dx$, d) $\displaystyle\int(2x^2-1)3^x\,dx$.

Rješenje.

a)

$$\int x^2\ln x\,dx = \begin{bmatrix} u=\ln x & dv = x^2\,dx \\ du=\frac{1}{x}\,dx & v=\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} \end{bmatrix} = \ln x\cdot\frac{x^3}{3} - \int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$
$$= \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + C =$$
$$= \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C,\ C\in\mathbb{R}$$

b)

$$\int\frac{x+4}{\cos^2 x}\,dx = \begin{bmatrix} u=x+4 & dv=\frac{1}{\cos^2 x}\,dx \\ du=dx & v=\int\frac{1}{\cos^2 x}\,dx=\operatorname{tg} x \end{bmatrix} = (x+4)\operatorname{tg} x - \int\operatorname{tg} x\,dx \overset{Zad.1.2.8.a)}{=}$$
$$= (x+4)\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C,\ C\in\mathbb{R}$$

c)

$$\int(3-x)e^x\,dx = \begin{bmatrix} u=3-x & dv=e^x\,dx \\ du=-dx & v=\int e^x\,dx = e^x \end{bmatrix} = (3-x)e^x - \int e^x\cdot(-dx) =$$
$$= (3-x)e^x + \int e^x\,dx = (3-x)e^x + e^x + C = 4e^x - xe^x + C,\ C\in\mathbb{R}$$

d)

$$\begin{aligned}
\int \left(2x^2-1\right) 3^x\,dx &= \left[\begin{array}{cc} u = 2x^2-1 & dv = 3^x\,dx \\ du = 4x\,dx & v = \int 3^x\,dx = \frac{3^x}{\ln 3} \end{array}\right] = \\
&= \left(2x^2-1\right)\cdot\frac{3^x}{\ln 3} - \int \frac{3^x}{\ln 3}\cdot 4x\,dx = \\
&= \left(2x^2-1\right)\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{4}{\ln 3}\int x3^x\,dx = \\
&= \left[\begin{array}{cc} u = x & dv = 3^x\,dx \\ du = dx & v = \int 3^x\,dx = \frac{3^x}{\ln 3} \end{array}\right] = \\
&= \left(2x^2-1\right)\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{4}{\ln 3}\left(x\cdot\frac{3^x}{\ln 3} - \int\frac{3^x}{\ln 3}\,dx\right) = \\
&= \left(2x^2-1\right)\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{4}{\ln 3}\left(\frac{x3^x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3}\int 3^x\,dx\right) = \\
&= \left(2x^2-1\right)\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{4}{\ln 3}\left(\frac{x3^x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3}\int 3^x\,dx\right) = \\
&= \left(2x^2-1\right)\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{4x3^x}{(\ln 3)^2} + \frac{4\cdot 3^x}{(\ln 3)^3} + C,\ C\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

1.2.3 Integriranje racionalnih funkcija

Funkciju f nazivamo (**pravom**) **racionalnom** ako je $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ pri čemu su P i Q polinomi takvi da je stupanj polinoma P manji od stupnja polinoma Q.

Zadatak 1.2.20. Integrirajte:

a) $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx$, b) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x\left(x^2+1\right)}\,dx$, c) $\displaystyle\int \frac{x+9}{(x-3)^2}\,dx$.

Rješenje.

a) Podintegralna funkcija nije prava racionalna pa najprije treba podijeliti brojnik i nazivnik.

$$\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{3}{x^2-5x+6}$$

Nadalje, utvrđujemo tip i broj nultočki nazivnika te sukladno njima radimo rastav drugog pribrojnika na parcijalne razlomke. Budući da nazivnik ima 2 jednostruke realne nultoče ($x_1 = 3$ i $x_2 = 2$), tražimo konstante A i B takve da

$$\frac{3}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2},\ \text{za svaki } x\in\mathbb{R}.$$

Stavljanjem na zajednički nazivnik dobivamo:

$$\frac{3}{x^2-5x+6} = \frac{Ax-2A+Bx-3B}{(x-3)(x-2)}$$

pa slijedi da za svaki x vrijedi

$$Ax - 2A + Bx - 3B = 3.$$

Iz prethodne relacije zapisujemo sustav:

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -2A - 3B &= 3. \end{aligned}$$

Iz sustava dobivamo da je $B = -3$ i $A = 3$. Dakle, traženi rastav je

$$\frac{3}{x^2 - 5x + 6} = \frac{3}{x-3} - \frac{3}{x-2}.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6}\, dx &= \int \left(1 + \frac{3}{x^2 - 5x + 6}\right) dx = \\ &= \int dx + \int \frac{3}{x^2 - 5x + 6}\, dx = x + 3\int \frac{1}{x-3}\, dx - 3\int \frac{1}{x-2}\, dx = \\ &= x + 3\ln|x-3| - 3\ln|x-2| + C,\ C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

b) Nakon provedenog množenja u nazivniku podintegralne funkcije primjećujemo da se ne radi o pravoj racionalnoj funkciji pa najprije podijelimo polinome. Jedna nultočka nazivnika je jednostruka realna $x_1 = 0$, a druge dvije su kompleksno konjugirane $x_{2,3} = \pm i$. Iz tog razloga rastav ima sljedeći oblik:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x^2+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \\ &= \frac{Ax^2 + A + Bx^2 + Cx}{x(x^2+1)}, \end{aligned}$$

odnosno

$$Ax^2 + A + Bx^2 + Cx = 1.$$

Dobivamo sustav:

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ C &= 0 \\ A &= 1 \end{aligned}$$

iz čega odmah dobivamo da je $B = -1$.

$$\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}\,dx = \int \frac{x^3+x+1}{x^3+x}\,dx = \int \left(1+\frac{1}{x^3+x}\right)dx = \int dx + \int \frac{1}{x^3+x}\,dx =$$
$$= x + \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \begin{bmatrix} t = x^2+1 \\ dt = 2x\,dx \\ x\,dx = \frac{1}{2}\,dt \end{bmatrix} = x + \ln|x| - \int \frac{1}{2t}\,dt =$$
$$= x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|t| + C = x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

c) Podintegralna funkcija je prava racionalna. Nazivnik ima jednu dvostruku nultočki $x_{1,2} = 3$ zato imamo sljedeći rastav

$$\frac{x+9}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} = \\ = \frac{Ax-3A+B}{(x-3)^2}.$$

Dobivamo sustav:

$$A = 1$$
$$-3A + B = 9$$

iz čega slijedi da je $B = 12$.

$$\int \frac{x+9}{(x-3)^2}\,dx = \int \frac{1}{x-3}\,dx + \int \frac{12}{(x-3)^2}\,dx = \begin{bmatrix} t = x-3 \\ dt = dx \end{bmatrix} =$$
$$= \int \frac{1}{t}\,dt + 12\int t^{-2}\,dt = \ln|t| - 12\cdot\frac{1}{t} + C =$$
$$= \ln|x-3| - 12\cdot\frac{1}{x-3} + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Primjer 1.2.21. Drugo rješenje Zadatka 1.2.11.b).

$$\int \frac{1}{3^x+2}\,dx = \begin{bmatrix} t = 3^x + 2 \Rightarrow 3^x = t-2 \\ dt = 3^x \cdot \ln 3\,dx \\ dx = \frac{1}{3^x\cdot\ln 3}\,dt = \frac{1}{(t-2)\ln 3}\,dt \end{bmatrix} = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{(t-2)\ln 3}\,dt = \frac{1}{\ln 3}\int \frac{1}{t(t-2)}\,dt = (*)$$

Rastav na parcijalne razlomke je:

$$\frac{1}{t(t-2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-2} = \\ = \frac{At+Bt-2A}{t(t-2)}.$$

Dobivamo sustav:

$$A + B = 0$$
$$-2A = 1$$

pa slijedi da je $A = -\frac{1}{2}$ i $B = \frac{1}{2}$. Nastavljamo s integralom.

$$(*) = \frac{1}{\ln 3} \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{t} + \frac{\frac{1}{2}}{t-2} \right) dt = \frac{1}{\ln 3} \left(-\frac{1}{2} \int \frac{1}{t}\, dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t-2}\, dt \right) =$$
$$= \frac{1}{\ln 3} \left(-\frac{1}{2} \ln |t| + \frac{1}{2} \ln |t-2| \right) + C = -\frac{1}{2\ln 3} \ln (3^x + 2) + \frac{1}{2\ln 3} \ln 3^x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Zadatak 1.2.22. (Zadaci s kolokvija)

Integrirajte:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+8x}$, b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x-2}$, c) $\displaystyle\int \frac{x^3+3x^2+x+1}{2x^2+x}\, dx$.

Rješenje.

a) Rastav na parcijalne razlomke je

$$\frac{1}{x(x+8)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+8} = \frac{Ax + 8A + Bx}{x(x+8)}$$

pa je $A = \frac{1}{8}$ i $B = -\frac{1}{8}$.

$$\int \frac{dx}{x^2+8x} = \int \frac{1}{x(x+8)}\, dx = \int \frac{\frac{1}{8}}{x}\, dx + \int \frac{-\frac{1}{8}}{x+8}\, dx = \frac{1}{8} \int \frac{1}{x}\, dx - \frac{1}{8} \int \frac{1}{x+8}\, dx =$$
$$= \frac{1}{8} \ln |x| - \frac{1}{8} \ln |x+8| + C,\ C \in \mathbb{R}$$

b) Nazivnik podintegralne funkcije ima jednostruke nultočke $x_1 = 1$ i $x_2 = -2$ pa je rastav:

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{Ax + 2A + Bx - B}{(x-1)(x+2)}.$$

$$\int \frac{dx}{x^2+x+2} = \int \frac{\frac{1}{3}}{x-1}\, dx + \int \frac{-\frac{1}{3}}{x+2}\, dx = \frac{1}{3} \ln |x-1| - \frac{1}{3} \ln |x+2| + C,\ C \in \mathbb{R}$$

c) Podintegralna funkcija nije prava racionalna pa je najprije potrebno podijeliti polinome.

$$\begin{array}{rl}
- & (x^3 + 3x^2 + x + 1) \div (2x^2 + x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} \\
 & x^3 + \frac{1}{2}x^2 \\
\hline
- & \frac{5}{2}x^2 + x + 1 \\
 & \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{4}x \\
\hline
 & -\frac{1}{4}x + 1
\end{array}$$

Prema tome, slijedi da je:

$$\frac{x^3+3x^2+x+1}{2x^2+x}=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}+\frac{-\frac{1}{4}x+1}{2x^2+x}.$$

Sada je još potrebno napraviti rastav na parcijalne razlomke koji je

$$\begin{aligned}\frac{-\frac{1}{4}x+1}{2x^2+x}&=\frac{A}{x}+\frac{B}{2x+1}=\\&=\frac{2Ax+A+Bx}{2x^2+x}\end{aligned}$$

te rješavanjem sustava:

$$2A+B=-\frac{1}{4}$$

$$A=1$$

dobijemo da je $A=1$ i $B=-\frac{9}{4}$.

$$\begin{aligned}\int\frac{x^3+3x^2+x+1}{x(2x+1)}\,dx&=\int\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}+\frac{-\frac{1}{4}x+1}{2x^2+x}\right)dx=\\&=\frac{1}{2}\int x\,dx+\frac{5}{4}\int dx+\int\frac{-\frac{1}{4}x+1}{x(2x+1)}\,dx=\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{5}{4}x+\int\left(\frac{1}{x}-\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{2x+1}\right)dx=\\&=\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{4}x+\int\frac{1}{x}\,dx-\frac{9}{4}\int\frac{1}{2x+1}\,dx=\\&=\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{4}x+\ln|x|-\frac{9}{8}\ln|2x+1|+C,\ C\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Poglavlje 3

Određeni integral

3.1 Uvodni dio

Određeni integral je integral oblika

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

pri čemu je a donja granica, b gornja granica. Interval $[a, b]$ nazivamo integral integracije.

Teorem 3.1.1. Newton-Leibnizova formula
Vrijedi da je

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

gdje je $F'(x) = f(x)$, za svaki $x \in [a, b]$.

Teorem 3.1.2. Svojstva određenog integrala

a) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

b) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

c) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, za $c \in \langle a,\, b\rangle$

d) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ ako je $f(x) \geq 0$, za svaki $x \in [a,\, b]$

e) **aditivnost**

f) **homogenost**

Zadatak 3.1.3. Riješite sljedeće određene integrale.

a) $\displaystyle\int_{-3}^{5} \left(3x^2 - 1\right)\, dx,$ b) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2}\, dx,$ c) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin x\, dx$

Rješenje. a)

$$\int_{-3}^{5} \left(3x^2 - 1\right)\, dx = 3\int_{-3}^{5} x^2\, dx - \int_{-3}^{5} 1\, dx = 3\frac{x^3}{3}\Big|_{-3}^{5} - x\Big|_{-3}^{5} =$$
$$= 3\left(\frac{5^3}{3} - \frac{(-3)^3}{3}\right) - (5 - (-3)) = 3\left(\frac{125}{3} + \frac{27}{3}\right) - 8 = 144$$

b)

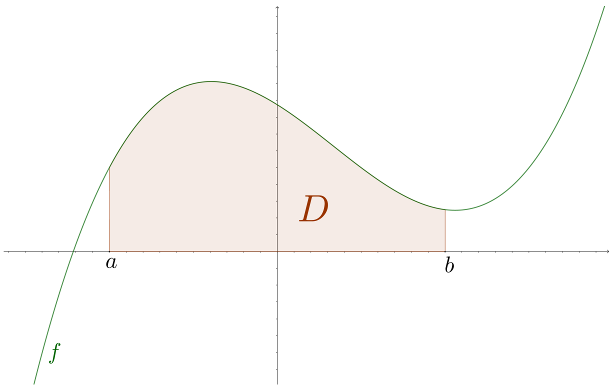
$$\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2}\, dx = \int_{1}^{2} x^{-2}\, dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_{1}^{2} = \frac{2^{-1}}{-1} - \frac{1^{-1}}{-1} = \frac{1}{2}$$

c)

$$\int_{0}^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x\Big|_{0}^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2$$

3.2 Određeni integral pozitivne funkcije - geometrijska interpretacija

Određeni integral $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\, dx$ jednak je površini ispod grafa funkcije f, a iznad osi x na intervalu $[a, b]$.



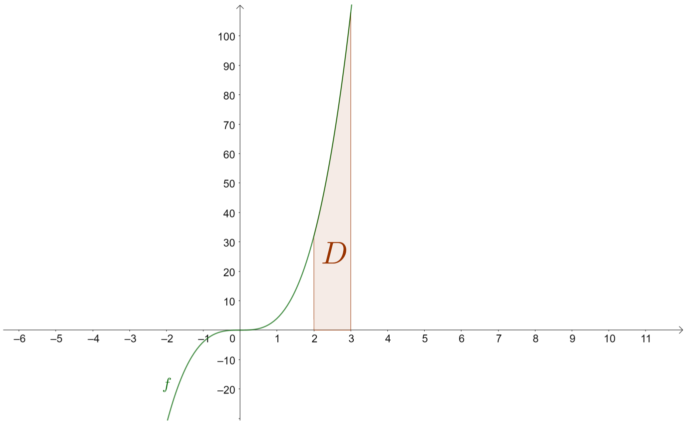
Slika 3.1: Primjer površine ispod grafa pozitivne funkcije f

Zadatak 3.2.1. Izračunajte $\displaystyle\int_{2}^{3} 4x^3\, dx$ i geometrijski interpretirajte rezultat.

Rješenje. Riješimo najprije zadani integral.

$$\int_2^3 4x^3\,dx = 4\int_2^3 x^3\,dx = 4\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_2^3 = 4\cdot\left(\frac{3^4}{4}-\frac{2^4}{4}\right) = 65$$

Za geometrijsku interpretaciju skiciramo graf podintegralne funkcije.



Slika 3.2: Graf funkcije $f(x) = 4x^3$

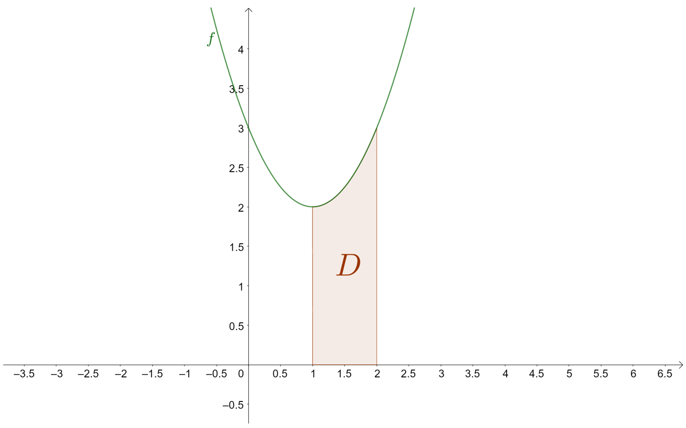
Geometrijska interpretacija je $P(D) = 65$.

Zadatak 3.2.2. Izračunajte $\displaystyle\int_1^2 \left(x^2-2x+3\right)\,dx$ i geometrijski interpretirajte rezultat.

Rješenje.

$$\int_1^2 \left(x^2-2x+3\right)\,dx = \int_1^2 x^2\,dx - 2\int_1^2 x\,dx + 3\int_1^2 1\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 - 2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + 3\cdot x\Big|_1^2 =$$
$$= \frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}-2\cdot\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right)+3\cdot(2-1) = \frac{7}{3}$$

Za geometrijsku interpretaciju analiziramo $f(x) = x^2-2x+3$. Kvadratna funkcija nema realnih nultočaka, konveksna je i tjeme joj je u točki $(1,2)$.



Slika 3.3: Graf funkcije $f(x) = x^2 - 2x + 3$

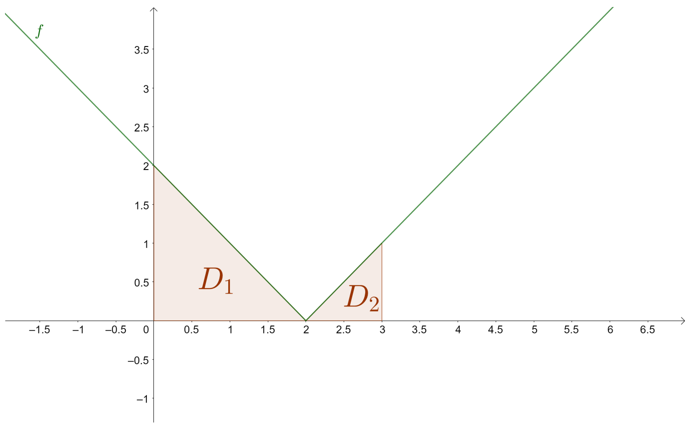
Geometrijska interpretacija je $P(D) = \frac{7}{3}$.

Napomena 3.2.3. Newton-Leibnizovu formulu u prošlom zadatku mogli smo primijeniti i tako da najprije zapišemo primitivne funkcije svih podintegralnih funkcija, a potom primijenimo formulu:

$$\dots = \left(\frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Bigg|_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 + 3\cdot 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1^2 + 3\cdot 1\right) = \frac{7}{3}.$$

Zadatak 3.2.4. Izračunajte $\displaystyle\int_0^3 |x-2|\,dx$ i geometrijski interpretirajte rezultat.

Rješenje. Budući da ovdje trebamo odrediti primitivnu funkciju apsolutne vrijednosti, potrebno je najprije promotriti funkciju $f(x) = |x-2|$ na intervalu $[0,\,3]$ te se sukladno ponašanju funkcije "osloboditi" znaka apsolutne vrijednosti.



Slika 3.4: Graf funkcije $f(x) = |x-2|$

Promatramo funkciju na $[0, 3]$. Vidimo da za $x \in [0,\,2]$ apsolutna vrijednost mijenja predznak izraza $x-2$ iz negativnog u pozitivni, dok za $x \in [2,\,3]$ predznak izraza $x-2$ ostaje nepromijenjen (pozitivan).

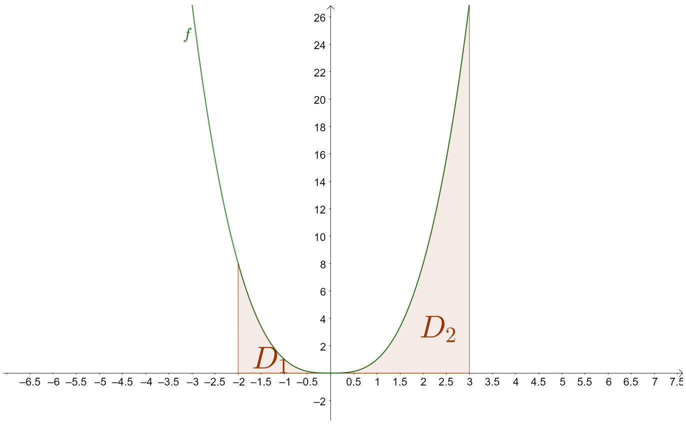
Integral računamo tako da ga rastavimo na dva integrala koristeći svojstvo ulančanosti integrala. Posebno obratite pozornost na granice tako dobivenih integrala.

$$\begin{aligned}\int_0^3 |x-2|\,dx &= \int_0^2 -(x-2)\,dx + \int_2^3 (x-2)\,dx = \int_0^2 (2-x)\,dx + \int_2^3 (x-2)\,dx = \\ &= \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_2^3 = \\ &= \left(4 - \frac{4}{2}\right) - \left(0 - \frac{0}{2}\right) + \left(\frac{9}{2} - 6\right) - \left(\frac{4}{2} - 4\right) = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

Geometrijska interpretacija je $P(D_1) + P(D_2) = \frac{5}{2}$.

Zadatak 3.2.5. Izračunajte $\displaystyle\int_{-2}^3 |x|^3\,dx$ i geometrijski interpretirajte rezultat.

Rješenje. Najprije skiciramo graf funkcije ispod znaka integrala.



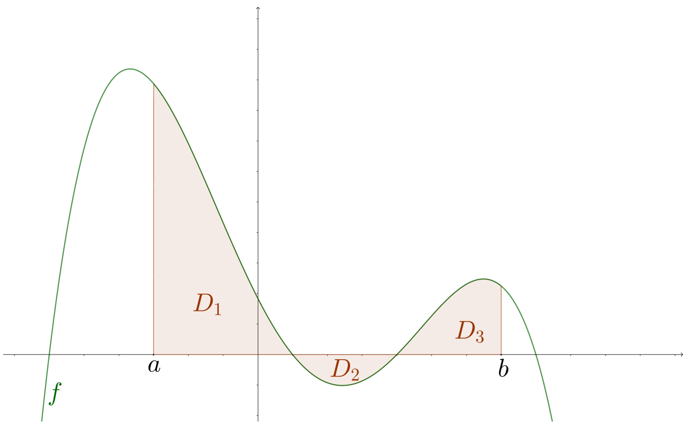
Slika 3.5: Graf funkcije $f(x) = |x|^3$

$$\int_{-2}^{3} |x|^3\,dx = \int_{-2}^{0} (-x)^3\,dx + \int_{0}^{3} x^3\,dx = -\int_{-2}^{0} x^3\,dx + \int_{0}^{3} x^3\,dx = -\frac{x^4}{4}\bigg|_{-2}^{0} + \frac{x^4}{4}\bigg|_{0}^{3} = \frac{97}{4}$$

Geometrijska interpretacija je $P(D_1) + P(D_2) = \frac{97}{4}$.

3.3 Integrali ostalih funkcija - geometrijska interpretacija

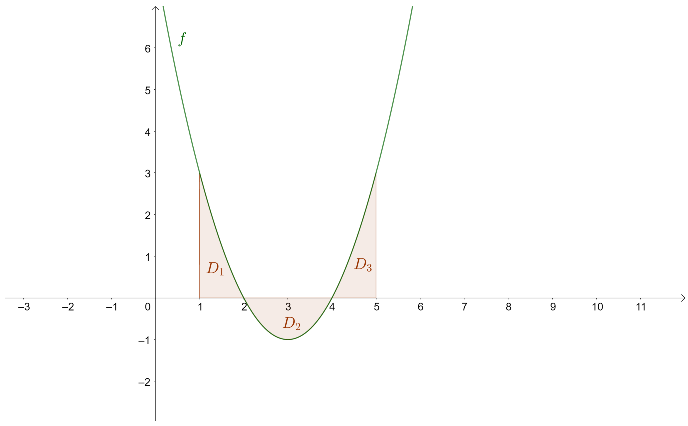
Određeni integral funkcije koja nije pozitivna na cijelom intervalu $[a, b]$ interpretiramo nešto drugačije. Površine likova koje funkcija zatvara s osi x kad je pozitivna dolaze u zbroj s pozitivnim predznakom, a površine koje funkcija zatvara s osi x kad je negativna dolaze s negativnim predznakom.



Slika 3.6: Primjer neke funkcije i površina koje zatvara s osi x

Tada je geometrijska interpretacija: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = P(D_1) - P(D_2) + P(D_3).$

Primjer 3.3.1. Neka je zadana funkcija $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Izračunajmo sljedeća 4 integrala: $\int_1^2 f(x)\,dx$, $\int_2^4 f(x)\,dx$, $\int_4^5 f(x)\,dx$ te $\int_1^5 f(x)\,dx$.



Slika 3.7: Graf funkcije $f(x) = x^2 - 6x + 8$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \left(x^2 - 6x + 8\right)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - 6\cdot\frac{x^2}{2} + 8x\right)\Bigg|_1^2 = \frac{4}{3}$$

$$\int_2^4 f(x)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - 6\cdot\frac{x^2}{2} + 8x\right)\Bigg|_2^4 = -\frac{4}{3}$$

(apsolutna vrijednost ovog broja je iznos površine $P(D_2)$)

$$\int_4^5 f(x)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - 6\cdot\frac{x^2}{2} + 8x\right)\Bigg|_4^5 = \frac{4}{3}$$

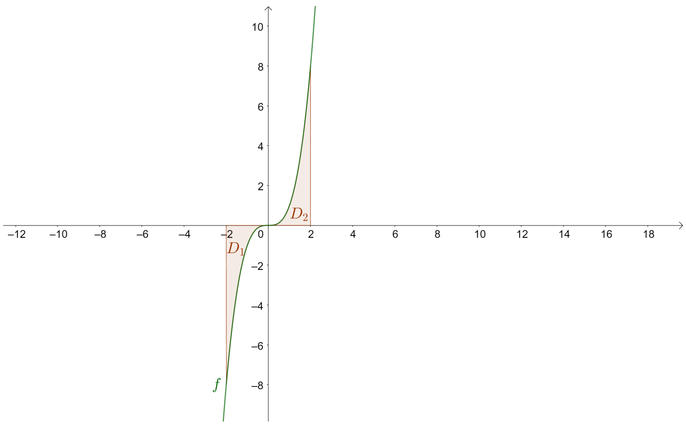
$$\int_1^5 f(x)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - 6\cdot\frac{x^2}{2} + 8x\right)\Bigg|_1^5 = \frac{4}{3}$$

(po pravilu ulančanosti ovaj se broj dobije kao zbroj prethodna tri integrala)

Geometrijska interpretacija je $\int_1^5 f(x)\,dx = P(D_1) - P(D_2) + P(D_3)$.

Zadatak 3.3.2. Izračunajte $\int_{-2}^2 x^3\,dx$ i geometrijski interpretirajte rezultata.

Rješenje. Najprije skiciramo graf podintegralne funkcije.



Slika 3.8: Graf funkcije $f(x) = x^3$

$$\int_{-2}^{2} x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{2^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = 0$$

Geometrijska interpretacija je $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^3\,dx = -P(D_1) + P(D_2)$.

Napomena 3.3.3. Primjećujemo da je iznos površina područja D_1 i D_2 isti. Funkcija $f(x) = x^3$ je neparna funkcija pa je njezin graf centralno simetričan s obzirom na ishodište. Općenito, ako je podintegralna funkcija neparna te ju integriramo na simetričnom intervalu oblika $[-a,\, a]$, onda je $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

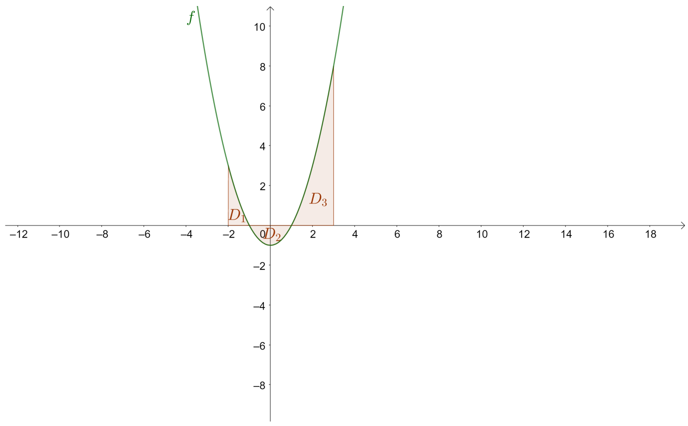
Za parnu funkciju $g(x)$ vrijedi da je $\displaystyle\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} g(x)\,dx$.

Zadatak 3.3.4. Izračunajte $\displaystyle\int_{-2}^{3} \left(x^2 - 1\right)\,dx$ i geometrijski interpretirajte rezultat.

Rješenje.

$$\int_{-2}^{3} \left(x^2 - 1\right)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Bigg|_{-2}^{3} = \frac{20}{3}$$

Podintegralna funkcija $f(x) = x^2 - 1$ ima dvije nultočke $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$ i tjeme u $(0, -1)$.

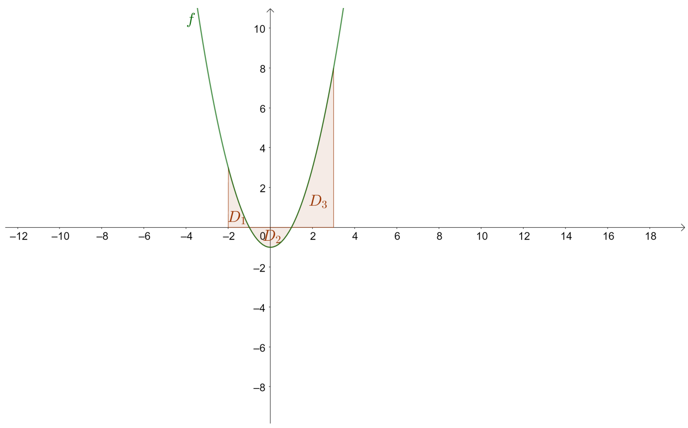


Slika 3.9: Graf funkcije $f(x) = x^2 - 1$

Geometrijska interpretacija je $\int_{-2}^{3} \left(x^2 - 1\right)\, dx = P(D_1) - P(D_2) + P(D_3)$.

Zadatak 3.3.5. Izračunajte površinu lika omeđenog grafom funkcije $f(x) = x^2 - 1$, osi x i pravcima $x = -2$ i $x = 3$.

Rješenje. Skica je ista kao u prošlom zadatku. Ono što se u ovom zadatku traži koliko je $P(D_1) + P(D_2) + P(D_3)$.



Slika 3.10: Graf funkcije $f(x) = x^2 - 1$

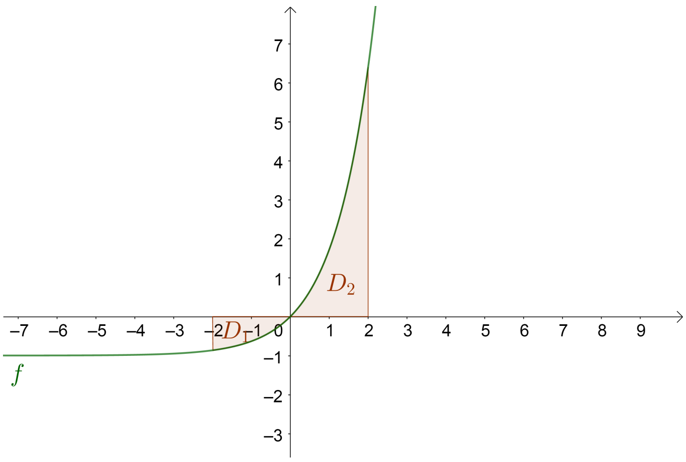
Razlika u odnosu na ono što smo dobili u prethodnom zadatku je u dijelu $\int_{-1}^{1} \left(x^2 - 1\right)\, dx$

čiji je iznos negativan broj, a čija apsolutna vrijednost odgovara površini $P(D_2)$.

$$
\begin{aligned}
P(D_1)+P(D_2)+P(D_3) &= \int_{-2}^{-1}\left(x^2-1\right)\,dx-\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)\,dx+\int_{1}^{3}\left(x^2-1\right)\,dx=\\
&=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_{-2}^{-1}-\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_{-1}^{1}+\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_{1}^{3}=\\
&=\left(\frac{(-1)^3}{3}+1\right)-\left(\frac{(-2)^3}{3}+2\right)-\left[\left(\frac{1^3}{3}-1\right)-\left(\frac{(-1)^3}{3}+1\right)\right]+\\
&+\left(\frac{3^3}{3}-3\right)-\left(\frac{1^3}{3}-1\right)=\frac{28}{3}
\end{aligned}
$$

Zadatak 3.3.6. Izračunajte površinu područja omeđenog grafom funkcije $f(x)=e^x-1$, osi x te pravcima $x=-2$ i $x=2$.

Rješenje. Najprije skiciramo graf funkcije $f(x)=e^x-1$.



Slika 3.11: Graf funkcije $f(x)=e^x-1$

Tražimo $P(D_1)+P(D_2)$. Budući da je područje D_1 ispod osi x, integral koji njemu odgovara dolazi u zbroj s negativnim predznakom. Zato imamo

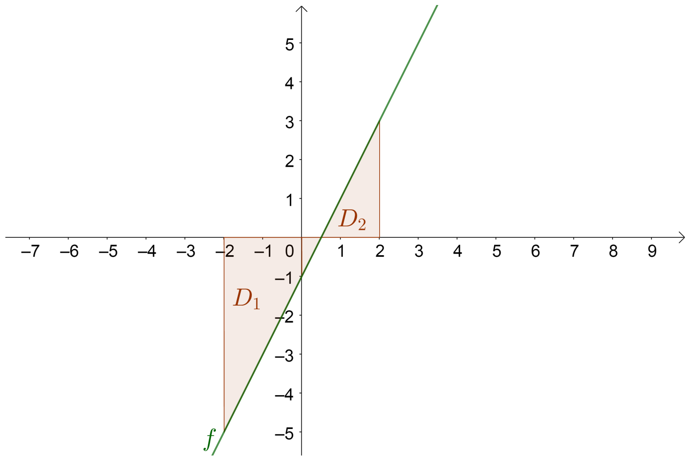
$$
\begin{aligned}
P(D_1)+P(D_2) &= -\int_{-2}^{0}(e^x-1)\,dx+\int_{0}^{2}\left(e^2-1\right)\,dx=-\left(e^x-x\right)\Bigg|_{-2}^{0}+\left(e^x-x\right)\Bigg|_{0}^{2}=\\
&=-\left[(e^0-0)-(e^{-2}-(-2))\right]+(e^2-2)-(e^0-0)=e^{-2}+e^2-2
\end{aligned}
$$

Zadatak 3.3.7. Izračunajte sljedeće integrale i interpretirajte rezultat:

a) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(2x-1)\,dx,$ b) $\displaystyle\int_{-2\pi}^{\pi}\cos x\,dx.$

Rješenje.

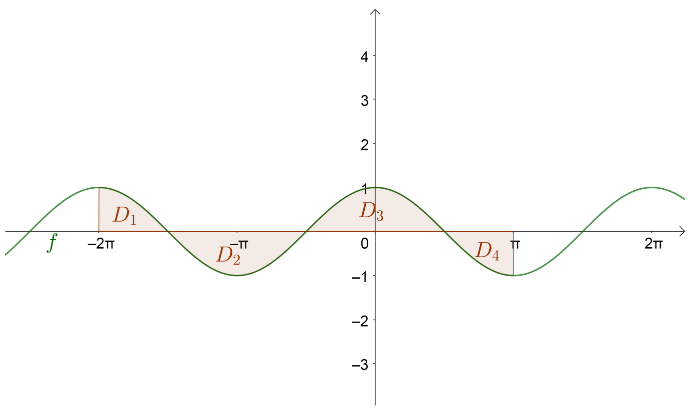
a) Najprije skiciramo graf funkcije $f(x) = 2x - 1$. Radi se o linearnoj funkciji koja je rastuća i čija je nultočka $x = \frac{1}{2}$.



Slika 3.12: Graf funkcije $f(x) = 2x - 1$

$$\int_{-2}^{2} (2x - 1)\, dx = \left(2 \cdot \frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \left(2 \cdot \frac{2^2}{2} - 2\right) - \left(2 \cdot \frac{(-2)^2}{2} - (-2)\right) =$$
$$= -4 = -P(D_1) + P(D_2)$$

b) Graf funkcije $f(x) = \cos x$ dan je na sljedećem prikazu.

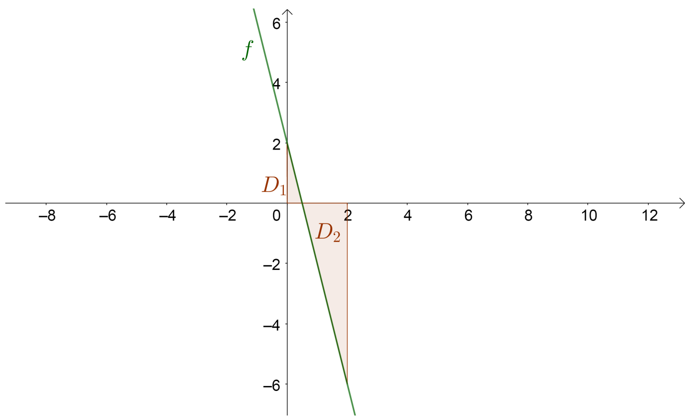


Slika 3.13: Graf funkcije $f(x) = \cos x$

$$\int_{-2\pi}^{\pi} \cos x\, dx = \sin x \Bigg|_{-2\pi}^{\pi} = \sin \pi - \sin(-2\pi) = 0 = P(D_1) - P(D_2) + P(D_3) - P(D_4)$$

Zadatak 3.3.8. Izračunajte površinu područja omeđenog s osi x, pravcima $x = 0$ i $x = 2$ i grafom funkcije $f(x) = 2 - 4x$.

Rješenje. Funkcija f je padajuća linearna funkcija s nultočkom $x = \frac{1}{2}$.



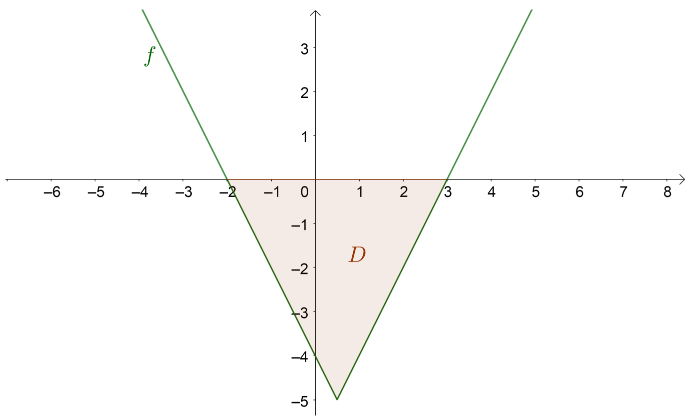
Slika 3.14: Graf funkcije $f(x) = 2 - 4x$

$$P(D_1) + P(D_2) = \int_0^{\frac{1}{2}} (2-4x)\ dx - \int_{\frac{1}{2}}^{2} (2-4x)\ dx =$$

$$= \left(2x - 4 \cdot \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \left(2x - 4 \cdot \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} = 5$$

Zadatak 3.3.9. Izračunajte površinu područja omeđenog s osi x i grafom funkcije $f(x) = |2x-1| - 5$.

Rješenje. Funkcija f ima nultočke $x_1 = -2$ i $x_2 = 3$.



Slika 3.15: Graf funkcije $f(x) = |2x-1| - 5$

$$P(D) = -\int_{-2}^{3} (|2x-1|-5)\ dx = -\int_{-2}^{3} |2x-1|\, dx + 5\int_{-2}^{3} 1\, dx =$$
$$= -\left[\int_{-2}^{\frac{1}{2}} (-2x+1)\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{3} (2x-1)\, dx\right] + 5x\,\Big|_{-2}^{3} =$$
$$= -\left[\left(-2\cdot\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-2}^{\frac{1}{2}} + \left(2\cdot\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{3}\right] + 25 = \frac{25}{2}$$

Napomena 3.3.10. Površine područja u Zadatku 3.3.8 i 3.3.9 možemo računati i tako da prepoznamo trokute kao sastavne dijelove tih područja. Taj način rješavanja možemo koristiti kao provjeru.

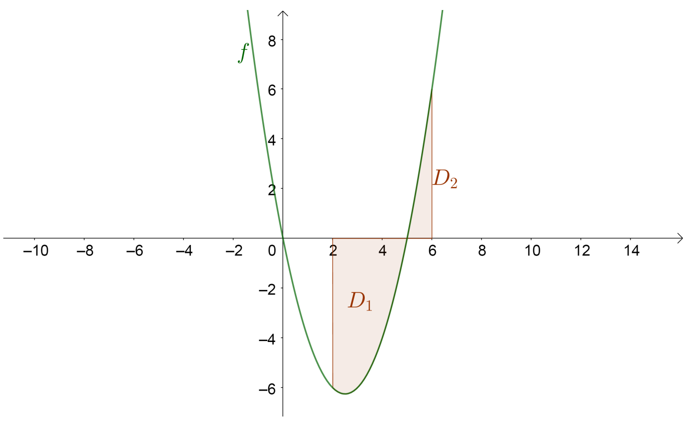
Zadatak 3.3.11. (Zadaci s kolokvija)

a) Geometrijski interpretirajte integral $\displaystyle\int_{2}^{6} x(x-5)\, dx$.

b) Izračunajte $\displaystyle\int_{-4}^{-1} (|x+2|-1)\ dx$.

Rješenje.

a) Podintegralna funkcija je kvadratna funkcija $f(x) = x^2 - 5x$ koja je konveksna i čije su nultočke $x_1 = 0$ i $x_2 = 5$.



Slika 3.16: Graf funkcije $f(x) = x^2 - 5x$

Primjetite da se ovdje u tekstu zadatka ne zahtijeva računanje integrala, nego samo geometrijska interpretacija koja je $\displaystyle\int_{2}^{6} x(x-5)\, dx = -P(D_1) + P(D_2)$.

b) Najprije zadani integral razdvojimo na integral apsolutne vrijednosti i integral ostatka. S obzirom na ponašanje izraza ispod znaka apsolutne vrijednosti, po pravilu ulančanosti integrala, razdvojimo prvi integral na dva integrala.

$$\begin{aligned}
\int_{-4}^{-1} (|x+2|-1)\ dx &= \int_{-4}^{-1} |x+2|\, dx - \int_{-4}^{-1} 1\, dx = \\
&= \int_{-4}^{-2} (-x-2)\, dx + \int_{-2}^{-1} (x+2)\, dx - \int_{-4}^{-1} 1\, dx = \\
&= \left(-\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_{-4}^{-2} + \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{-2}^{-1} - x\Bigg|_{-4}^{-1} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ovdje crtež grafa funkcije $f(x) = |x+2|$ nije potreban, no može poslužiti kao pomoć pri određivanju vrijednosti x u kojoj dolazi do promjene predznaka izraza $x+2$.

Poglavlje 4

Metode računanja određenog integrala

Kao i kod neodređenih integrala, kod računanja određenih integrala neelementarnih funkcija koristimo metodu supstitucije i parcijalne integracije. No, moramo voditi računa o granicama integracije.

4.1 Supstitucija u određenom integralu

Zadatak 4.1.1. Izračunajte $\int_0^2 2x\left(x^2+1\right)^3\,dx$.

Rješenje. 1. način: odredi se neodređeni integral pa se iskoristi Newton-Leibnizova formula.

$$\int 2x\left(x^2+1\right)^3\,dx = \begin{bmatrix} t = x^2+1 \\ dt = 2x\,dx \end{bmatrix} = \int t^3\,dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{(x^2+1)^4}{4} + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^2 2x\left(x^2+1\right)^3\,dx = \frac{(x^2+1)^4}{4} + C\,\Bigg|_0^2 = \frac{5^4}{4} + C - \frac{1^4}{4} - C = 156$$

2. način: sukladno uvedenoj supstituciji promijene se i granice integracije.

$$\int_0^2 2x\left(x^2+1\right)^3\,dx = \begin{bmatrix} t = x^2+1 & x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 0^2+1 = 1 \\ dt = 2x\,dx & x_2 = 2 \Rightarrow t_2 = 2^2+1 = 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \int_1^5 t^3\,dt = \frac{t^4}{4}\Bigg|_1^5 = \frac{625}{4} - \frac{1}{4} = 156$$

Napomena 4.1.2. Drugi način rješavanja prošlog zadatka je bolji i ubuduće ćemo ga koristiti. Primijetite da u predzadnjem koraku nije potrebno vratiti ono što je bila supstitucija ($t = x^2 + 1$) jer smo izvršivši supstituciju na opisani načina, u potpunosti "preveli" integriranje po x u integiranje po t. Također, veza početne varijable x i supstitucijske varijable t mora biti jednoznačna.

Zadatak 4.1.3. Izračunajte: $\displaystyle\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,dx$.

Rješenje.

$$\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,dx = \begin{bmatrix} t = 1+2x \Rightarrow x = \frac{t-1}{2} \\ dt = 2\,dx \quad x_1 = 1 \Rightarrow t_1 = 3 \\ dx = \frac{1}{2}\,dt \quad x_2 = 4 \Rightarrow t_2 = 9 \end{bmatrix} = \int_3^9 \frac{\frac{t-1}{2}}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{4}\int_3^9 \frac{t-1}{\sqrt{t}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int_3^9 \left(\sqrt{t} - t^{-\frac{1}{2}}\right)\,dt = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_3^9 =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{2}{3}\sqrt{9}^3 - 2\sqrt{9}\right) - \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}^3 - 2\sqrt{3}\right)\right] = 3$$

Zadatak 4.1.4. Izračunajte: $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx$.

Rješenje.

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx = \begin{bmatrix} t^2 = e^x - 1 & e^x = t^2 + 1 \\ 2t\,dt = e^x\,dx & x_1 = 0 \Rightarrow t^2 = e^0 - 1 = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \\ 2t\,dt = (t^2+1)\,dx & x_2 = \ln 2 \Rightarrow t^2 = e^{\ln 2} - 1 = 1 \Rightarrow \\ dx = \frac{2t}{t^2+1}\,dt & t_2 = \pm 1 \Rightarrow t_2 = 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{t^2} \cdot \frac{2t}{t^2+1}\,dt = 2\int_0^1 |t| \cdot \frac{t}{t^2+1}\,dt = 2\int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1}\,dt =$$

$$= 2\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt = 2\left(\int_0^1 1\,dt - \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt\right) =$$

$$= 2\,(t - \arctan t)\Bigg|_0^1 = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

Napomena 4.1.5. Da smo u supstituciji izabrali za drugu granicu $t_2 = -1$, onda bi interval integracije bio $[-1, 0]$ te bismo imali:

$$\dots = \int_0^{-1} |t| \cdot \frac{2t}{t^2+1}\,dt = \int_0^{-1} -t \cdot \frac{2t}{t^2+1}\,dt = -\int_{-1}^0 -t \cdot \frac{2t}{t^2+1}\,dt = 2\int_{-1}^0 \frac{t^2}{t^2+1}\,dt = \dots$$

Napomena 4.1.6. Ovdje se radi o integralu parne funkcije za koju se može pokazati da za $a > 0$ vrijedi $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$ zbog simetrije grafa takve funkcije s obzirom na os y. Štoviše, iz tog svojstva također slijedi: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

Zadatak 4.1.7. Izračunajte: $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Rješenje.

$$\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} x = \sin t & x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t_1 = -\frac{\pi}{4} \\ dx = \cos t\,dt & x_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin t = \frac{1}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{6} \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} |\cos t|\cdot\cos t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos(2t))\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

U četvrtoj jednakosti maknuli smo apsolutnu vrijednost jer funkcija $g(t) = \cos t$ ima pozitivne vrijednosti za $t \in \left\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6} \right\rangle$ (na intervalu integracije).

Zadatak 4.1.8. Izračunajte: $\int_{1}^{e} \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$.

Rješenje.

$$\int_{1}^{e} \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx = \begin{bmatrix} t = \ln x & x_1 = 1 \Rightarrow t_1 = \ln 1 = 0 \\ dt = \frac{1}{x}\,dx & x_2 = e \Rightarrow t_2 = \ln e = 1 \end{bmatrix} = \int_{0}^{1} \sin t\,dt = -\cos t\Big|_{0}^{1} =$$

$$= -\cos 1 - (-\cos 0) = -\cos 1 + 1$$

4.2 Parcijalna integracija u određenom integralu

Formula: $\int_{a}^{b} u\,dv = uv\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v\,du$.

Zadatak 4.2.1. Riješite: $\int_{\ln 1}^{\ln 2} xe^x\,dx$.

Rješenje.

$$\int_{\ln 1}^{\ln 2} xe^x\,dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = e^x\,dx \\ du = dx & v = \int e^x\,dx = e^x \end{bmatrix} = xe^x \Big|_{\ln 1}^{\ln 2} - \int_{\ln 1}^{\ln 2} e^x\,dx =$$
$$= \left(\ln 2 \cdot e^{\ln 2} - \ln 1 \cdot e^{\ln 1}\right) - \int_{\ln 1}^{\ln 2} e^x\,dx = 2\ln 2 - 0 - e^x \Big|_{\ln 1}^{\ln 2} =$$
$$= 2\ln 2 - \left(e^{\ln 2} - e^{\ln 1}\right) = 2\ln 2 - 1$$

Zadatak 4.2.2. Riješite: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3)\sin x\,dx.$

Rješenje.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3)\sin x\,dx = \begin{bmatrix} u = x+3 & dv = \sin x\,dx \\ du = dx & v = \int \sin x\,dx = -\cos x \end{bmatrix} =$$
$$= (x+3)\cdot(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)\,dx =$$
$$= \left(\frac{\pi}{2}+3\right)\cdot\left(-\cos\frac{\pi}{2}\right) - 3\cdot(-\cos 0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx =$$
$$= 3 + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 3 + \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 4$$

Zadatak 4.2.3. Riješite: $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}\,dx.$

Rješenje.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}\,dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = \frac{1}{\sin^2 x}\,dx \\ du = dx & v = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x \end{bmatrix} = x\cdot(-\operatorname{ctg} x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} -\operatorname{ctg} x\,dx =$$
$$= \frac{\pi}{3}\cdot\left(-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{4}\cdot\left(-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right) + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x}\,dx =$$
$$= \begin{bmatrix} t = \sin x & x_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t_1 = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ dt = \cos x\,dx & x_2 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t_2 = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = -\frac{\sqrt{3}\pi}{9} + \frac{\pi}{4} + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{t}\,dt =$$
$$= -\frac{\sqrt{3}\pi}{9} + \frac{\pi}{4} + \ln|t|\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}\pi}{9} + \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Zadatak 4.2.4. Riješite: $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx.$

Rješenje.

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx = \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg} x & dv = 1 \, dx \\ du = \frac{1}{1+x^2} \, dx & v = \int 1 \, dx = x \end{bmatrix} = \operatorname{arctg} x \cdot x \Big|_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx =$$

$$= \operatorname{arctg} 1 \cdot 1 - \operatorname{arctg} 0 \cdot 0 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx =$$

$$= \begin{bmatrix} t = 1 + x^2 & x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1 + 0^2 = 1 \\ dt = 2x \, dx & x_2 = 1 \Rightarrow t_2 = 1 + 1^2 = 2 \\ x \, dx = \frac{1}{2} \, dt & \end{bmatrix} = \frac{\pi}{4} - \int_1^2 \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2} \, dt =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln |t| \Big|_1^2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$$

Zadatak 4.2.5. Riješite: $\displaystyle\int_0^{e-1} \ln(1+x) \, dx.$

Rješenje.

$$\int_0^{e-1} \ln(1+x) \, dx = \begin{bmatrix} t = 1 + x & x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1 + 0 = 1 \\ dt = dx & x_2 = e - 1 \Rightarrow t_2 = 1 + e - 1 = e \end{bmatrix} = \int_1^e \ln t \, dt =$$

$$= \begin{bmatrix} u = \ln t & dv = 1 \, dt \\ du = \frac{1}{t} \, dt & v = \int 1 \, dt = t \end{bmatrix} = \ln t \cdot t \Big|_1^e - \int_1^e t \cdot \frac{1}{t} \, dt =$$

$$= e \cdot \ln e - 1 \cdot \ln 1 - t \Big|_1^e = e - (e - 1) = 1$$

4.3 Nepravi integral

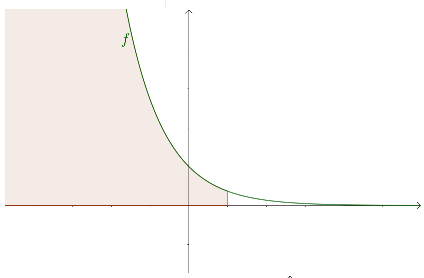
Nepravi integral je vrsta određenog integrala kod kojeg je jedna ili obje granice integracije $\pm\infty$ ili unutar područja integracije postoji točka/točke koje nisu u domeni funkcije $f(x)$ koja se integrira. Razlikujemo 4 tipa nepravog integrala. S desne strane, pored svakog od tipova dan je jedan primjer funkcije koja odgovara nepravom integralu. Kod prva tri grafa radi se o pozitivnim funkcijama pa pripradni integrali imaju istu geometrijsku intepretaciju kao ranije - površina ispod grafa funkcije. Pitanje koje se nameće je kolike su te površine budući da su u nekom smislu "površine do beskonačnosti". Naime, rezultat nepravog integrala može biti konačan broj ili beskonačno pa kažemo da integral konvergira ili divergira.

1. tip:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

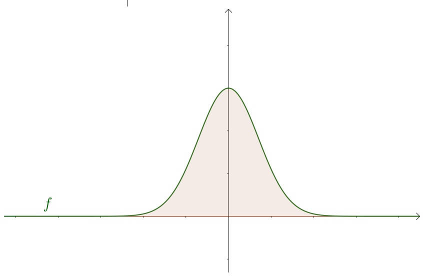
2. tip:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$



3. tip:

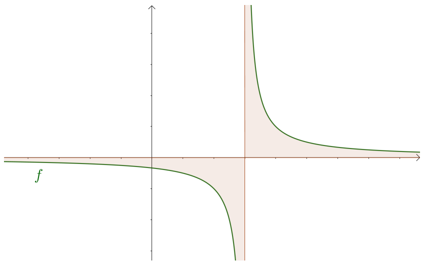
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty} \int_c^b f(x)\,dx$$



4. tip:

Ako $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ nije definirana u $c \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c_1\to c^-} \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \lim_{c_2\to c^+} \int_{c_2}^b f(x)\,dx,$$



pri čemu je $\lim_{c_1\to c^-}$ limes k c slijeva, a $\lim_{c_2\to c^+}$ limes k c zdesna.

Zadatak 4.3.1. Riješite: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$.

Rješenje.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \ln|x|\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} (\ln|b| - \ln 1) = +\infty$$

Zadatak 4.3.2. Riješite: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \\
&= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \\
&= \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_{a}^{0} + \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_{0}^{b} = \\
&= \lim_{a\to-\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} a) + \lim_{b\to+\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) = \\
&= \left(0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi
\end{aligned}$$

Napomena 4.3.3. U prvom koraku, kod raspisa početnog integrala na dva integrala, mogli smo koristiti neku drugu novu granicu koju smo postavili kao gornju granicu prvog integrala, odnosnu donju drugog integrala. Zbog prirode podintegralne funkcije (parna funkcija), nula se činila kao najbolji izbor.

Napomena 4.3.4. Funkcija $g(x) = \operatorname{tg} x$ nije definirana za $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Kada računamo tangens za x-eve koju su blizu navedenim vrijednostima, dobivamo sve veće vrijednosti pa je sukladno tome inverzna funkcija $\operatorname{arctg} x$ za "velike" x-eve jednaka $\frac{\pi}{2}$. Analogno zaključivanje je za x-eve koji teže k $-\infty$.

Zadatak 4.3.5. Riješite: $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx.$

Rješenje. Podintegralna funkcija nije definirana u $x = 2$ pa se radi o 4. tipu nepravog integrala.

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx &= \int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx + \int_{2}^{4} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx = \\
&= \lim_{c_1\to2^-} \int_{1}^{c_1} (x-2)^{-\frac{2}{3}}\,dx + \lim_{c_2\to2^+} \int_{c_2}^{4} (x-2)^{-\frac{2}{3}}\,dx = \\
&= \lim_{c_1\to2^-} \frac{(x-2)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \Bigg|_{1}^{c_1} + \lim_{c_2\to2^+} \frac{(x-2)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \Bigg|_{c_2}^{4} = \\
&= \lim_{c_1\to2^-} 3\left((c_1-2)^{\frac{1}{3}} - (1-2)^{\frac{1}{3}}\right) + \lim_{c_2\to2^+} 3\left((4-2)^{\frac{1}{3}} - (c_2-2)^{\frac{1}{3}}\right) = \\
&= \lim_{c_1\to2^-} 3\left(\sqrt[3]{c_1-2} - \sqrt[3]{-1}\right) + \lim_{c_2\to2^+} 3\left(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{c_2-2}\right) = \\
&= 3(\sqrt[3]{2-2}+1) + 3(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2-2}) = 3\sqrt[3]{2} + 3
\end{aligned}$$

Napomena 4.3.6. U prošlom zadatku mogli smo izvršiti i supstituciju kod određenog integrala. Raspis nakon 3. jednakosti bio bi:

$$(\dots) = \begin{bmatrix} t = x-2 & x_1 = 1 \Rightarrow t_1 = -1 & x_1 = c_2 \Rightarrow t_1 = c_2 - 2 \\ dt = dx & x_2 = c_1 \Rightarrow t_2 = c_1 - 2 & x_2 = 4 \Rightarrow t_2 = 4 - 2 = 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{c_1 \to 2^-} \int_1^{c_1-2} t^{-\frac{2}{3}}\, dt + \lim_{c_2 \to 2^+} \int_{c_2-2}^{2} t^{-\frac{2}{3}}\, dt = \lim_{c_1 \to 2^-} \frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \Bigg|_{-1}^{c_1-2} + \lim_{c_2 \to 2^+} \frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \Bigg|_{c_2-2}^{2} = (\dots)$$

Zadatak 4.3.7. Riješite: $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\, dx.$

Rješenje.

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b xe^{-x}\, dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = e^{-x}\, dx \\ du = dx & v = \int e^{-x}\, dx = -e^{-x} \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(-xe^{-x} \Bigg|_0^b - \int_0^b (-e^{-x})\, dx \right) = \lim_{b \to +\infty} \left(-be^{-b} + \int_0^b e^{-x}\, dx \right) =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(-be^{-b} + (-e^{-x}) \Bigg|_0^b \right) = \lim_{b \to +\infty} \left(-be^{-b} - e^{-b} + 1 \right) =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{b}{e^b} - e^{-b} + 1 \right) = 1$$

U zadnjem koraku koristili smo L'Hospitalovo pravilo:

$$\lim_{b \to +\infty} \frac{-b}{e^b} = \left(\frac{-\infty}{+\infty} \right) \stackrel{LH}{=} \lim_{b \to +\infty} \frac{-1}{e^b} = 0.$$

Zadatak 4.3.8. Riješite: $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx.$

Rješenje.

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_e^b \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx = \begin{bmatrix} t = \ln x & x_1 = e \Rightarrow t_1 = \ln e = 1 \\ dt = \frac{1}{x}\, dx & x_2 = b \Rightarrow t_2 = \ln b \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \int_1^{\ln b} \frac{1}{t^2}\, dt = \lim_{b \to +\infty} \frac{t^{-1}}{-1} \Bigg|_1^{\ln b} = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{\ln b} + 1 \right) = 1$$

Zadatak 4.3.9. Riješite: $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

Rješenje. Budući da $x = 0$ nije u domeni podintegralne funkcije, zadatku moramo pristupiti na sljedeći način.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{a \to 0} \int_a^1 x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \lim_{a \to 0} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Bigg|_a^1 = \lim_{a \to 0} \left(\frac{1^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{a^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) = 2$$

Zadatak 4.3.10. (Zadaci s kolokvija)

Riješite:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-3} 3^{2x-1}\,dx$, b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2x-1}\,dx$.

Rješenje.

a)

$$\int_{-\infty}^{-3} 3^{2x-1}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{-3} 3^{2x-1}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{-3} 9^{x}\cdot 3^{-1}\,dx = \frac{1}{3}\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{-3} 9^{x}\,dx =$$
$$= \frac{1}{3}\lim_{a\to-\infty}\left.\frac{9^{x}}{\ln 9}\right|_{a}^{-3} = \frac{1}{3}\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{9^{-3}}{\ln 9}-\frac{9^{a}}{\ln 9}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{9^{-3}}{\ln 9}-0\right) = \frac{1}{3^{7}\ln 9}$$

b)

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x-1}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{2x}\cdot e^{-1}\,dx = \frac{1}{e}\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{2x}\,dx =$$
$$= \begin{bmatrix} t=2x & x_1=a\Rightarrow t_1=2a \\ dt=2\,dx & x_2=0\Rightarrow t_2=0 \\ dx=\frac{1}{2}\,dt & \end{bmatrix} = \frac{1}{e}\lim_{a\to-\infty}\int_{2a}^{0} e^{t}\cdot\frac{1}{2}\,dt =$$
$$= \frac{1}{2e}\lim_{a\to-\infty}\int_{2a}^{0} e^{t}\,dt = \frac{1}{2e}\lim_{a\to-\infty}\left. e^{t}\right|_{2a}^{0} = \frac{1}{2e}\lim_{a\to-\infty}(e^{0}-e^{2a}) =$$
$$= \frac{1}{2e}(1-0) = \frac{1}{2e}$$

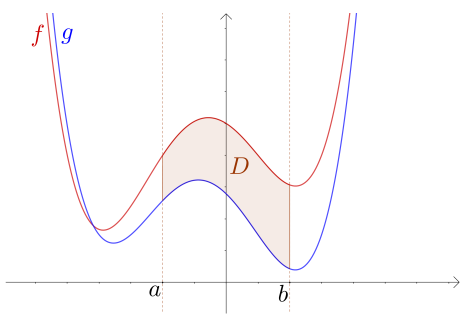
Poglavlje 5

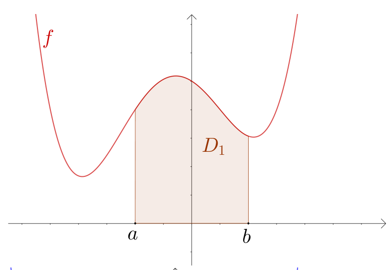
Primjena određenog integrala u geometriji

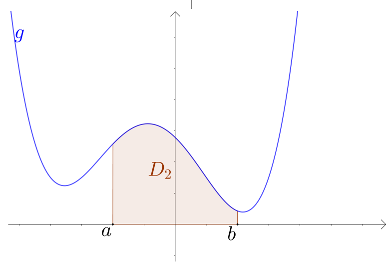
Određeni integral koristi se u geometriji za računanje površina i volumena. Već smo u Poglavlju 4 vidjeli neke primjere površina prilikom geometrijske interpretacije određenih integrala pozitivne i ostalih funkcija.

5.1 Površina

Zanima nas kako izračunati površinu područja D na slici. Koristeći znanje iz Poglavlja 4 možemo zaključiti da se površina D može dobiti kao razlika dviju površina, onog područja ispod veće (gornje) pozitivne funkcije i ispod manje (donje) pozitivne funkcije. Isto vrijedi i za površine područja koje se ne protežu samo iznad osi x.







$$P(D) = P(D_1) - P(D_2) = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

Po svojstvu aditivnosti određenog integrala slijedi: $P(D) = \displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$.

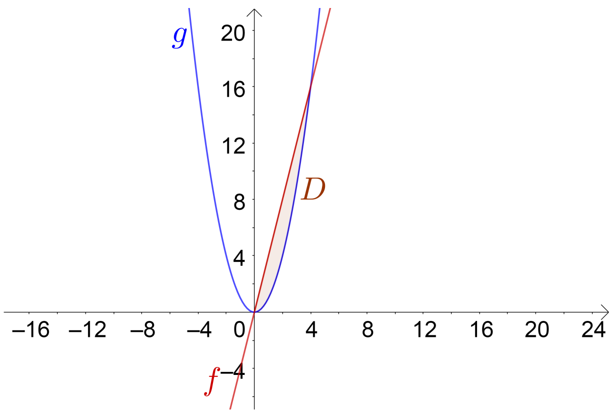
Zadatak 5.1.1. Izračunajte površinu područja omeđenog s:

a) $y = x^2$, $y = 4x$, b) $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$, c) $y^2 = x$, $y = x - 2$,

d) $x^2 + y^2 = 2x + 2y$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, e) $x^2 + y^2 + 8x = 0$, $x^2 + y^2 + 4x = 0$.

Rješenje.

a) Skiciranjem zadane kvadratne i linearne funkcije utvrdimo da je $f(x) = 4x$ gornja funkcija, a $g(x) = x^2$ donja funkcija.



Slika 5.1: Područje D

Zatim tražimo presječne točke navedene linearne i kvadratne funkcije.

$$x^2 = 4x$$

$$x(x-4) = 0$$

$$x_1 = 0, \;\; x_2 = 4$$

Donja granica je manja od dvije presječne točke, a gornja je veća (slijeva nadesno).

$$P(D) = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx = \left(4\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{32}{3}$$

b) Funkcija $f(x) = 4 - x^2$ je kvadratna konkavna funkcija s nultočkama u -2 i 2 te tjemenom $(0, 4)$, a funkcija $g(x) = x^2 - 2x$ je kvadratna konveksna funkcija s nultočkama u

0 i 2 te tjemenom $(1, -1)$.

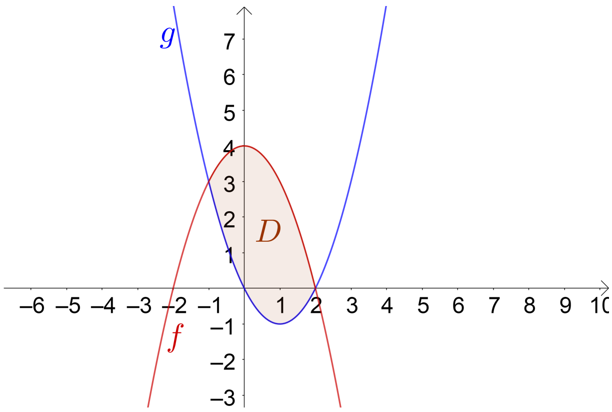
Presječne točke dobijemo rješavanjem sljedeće jednadžbe.

$$4 - x^2 = x^2 - 2x$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_1 = -1, \ x_2 = 2$$



Slika 5.2: Područje D

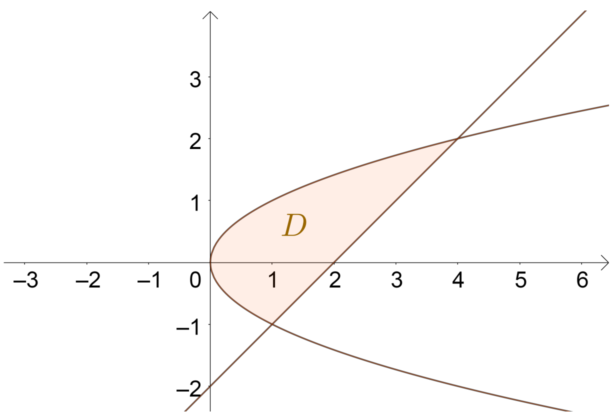
$$P(D) = \int_{-1}^{2} \left((4 - x^2) - (x^2 - 2x)\right) \, dx = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4) \, dx =$$

$$= \left(-2\frac{2}{3}x^3 + 2\frac{x^2}{2} + 4x\right) \Bigg|_{-1}^{2} = 9$$

c) Zadatak ćemo riješiti na dva načina.

1. način: integracijom po x.

Izrazom $y^2 = x$ dana je parabola izdužena po osi x, a $y = x - 2$ je jednadžba pravca.



Slika 5.3: Područje D

Presječne točke dobivamo na sljedeći način.

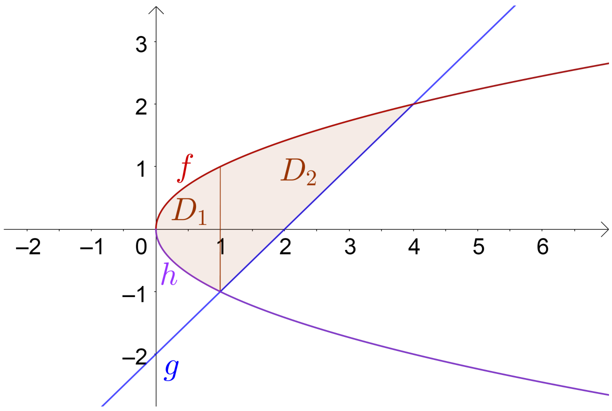
$$y^2 = y + 2$$

$$y^2 - y - 2 = 0$$

$$y_1 = -1,\ y_2 = 2$$

$$x_1 = y_1 + 2 = 1 \qquad x_2 = y_2 + 2 = 4$$

Dobivene presječne točke nisu dovoljne za odrediti granice integracije. Na skici vidimo da je najljevija točka područja $(0,0)$, a najdesnija točka $(4,2)$ pa su granice integracije 0 i 4. U određivanju gornje i donje funkcije koje omeđuju promatrano područje vidimo da je gornja funkcije gornja grana parabole, tj. $f(x) = \sqrt{x}$, a donja funkcija nije na cijelom intervalu integracije ista. Do $x = 1$ donja funkcija je donja grana parabole $h(x) = -\sqrt{x}$, a od $x = 1$ do $x = 4$ donja funkcija je linearna, tj. $g(x) = x - 2$. Zato površinu područja D računamo kao zbroj dviju površina $P(D_1) + P(D_2)$.

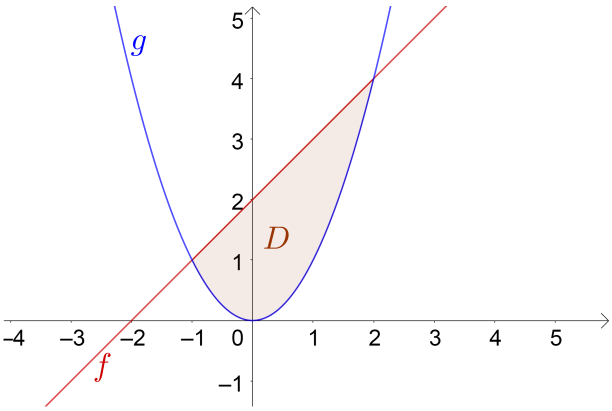


Slika 5.4: Područja D_1 i D_2

$$P(D) = P(D_1) + P(D_2) = \int_0^1 (\sqrt{x} - (-\sqrt{x}))\, dx + \int_1^4 (\sqrt{x} - (x - 2))\, dx =$$
$$= 2\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 + \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_1^4 = \frac{9}{2}$$

2. način: integracijom po y.

Zarotiramo li prethodnu skicu na način da na mjestu osi y bude os x te ju zrcalimo, dobijemo sljedeću skicu.



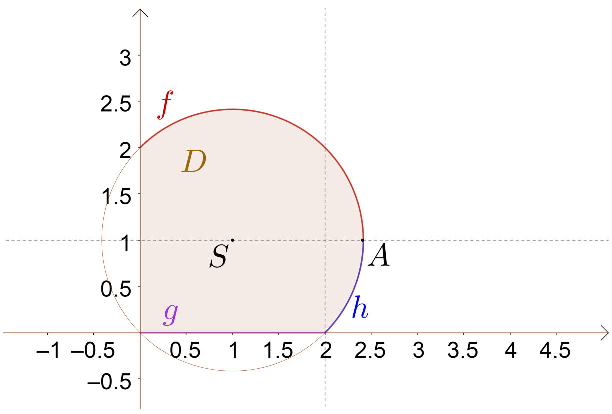
Slika 5.5: Područje D

Sada područje D odozdo omeđuje $g(y) = y^2$, a odozgo $f(y) = y + 2$. Funkcije izražavamo u varijabli y te također i granice koje iznose -1 i 2.

$$P(D) = \int_{-1}^{2} \left(y + 2 - y^2\right) \, dy = \left(\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right) \Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$

Zbog izduženosti parabole $y^2 = x$ po osi x drugi način rješavanja je lakši, no pomalo neprirodan. U zadacima u kojima se javlja pitanje površine morat ćemo sami odlučiti koji od dva načina odabrati.

d) Transformiramo li $x^2+y^2 = 2x+2y$, dobivamo jednadžbu kružnice $(x-1)^2+(y-1)^2 = 2$ čije je središte točka $S(1, 1)$, a radijus $r = \sqrt{2}$. Presječne točke kružnice i osi su $(0, 2)$ i $(2, 0)$.



Slika 5.6: Područje D

Područje D prostire se od osi y do točke A čija x-koordinata odgovara x-koordinati središta uvećanoj za iznos radijusa $(1 + \sqrt{2})$. Na cijelom intervalu $\left[0,\, 1 + \sqrt{2}\right]$ područje D nije odozgo i odozdo ograničeno istom funkcijom. Na intervalu $[0, 2]$ gornja je funkcija gornja polukružnica $f(x) = 1 + \sqrt{2-(x-1)^2}$, a donja je os x ($g(x) = 0$). Na intervalu $\left[2, 1+\sqrt{2}\right]$ gornja funkcija ostaje ista, a donja je donja polukružnica $h(x) = 1 - \sqrt{2-(x-1)^2}$. Prema navedenom, površinu područja D računamo kao:

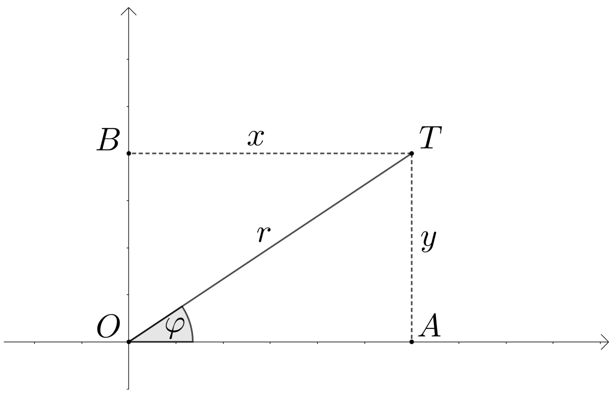
$$P(D) = P(D_1) + P(D_2) = \int_0^2 \left(1 + \sqrt{2-(x-1)^2} - 0\right)\,dx + \\ + \int_2^{1+\sqrt{2}} \left(\left(1 + \sqrt{2-(x-1)^2}\right) - \left(1 - \sqrt{2-(x-1)^2}\right)\right)\,dx.$$

Ovaj je račun poprilično teško izvesti do kraja, stoga odustajemo. Problem računanja površina ovakvih područja izvrsna je motivacija za uvođenje novog pristupa. Definiramo polarne koordinate.

Označimo s r udaljenost točke T od ishodišta $O(0,0)$, a s φ kut koji dužina $\overline{OT}$ zatvara s pozitivnim dijelom osi x. Koristeći trigonometriju pravokutnog trokuta, dobivamo da je

$$x = r\cos\varphi \text{ i } y = r\sin\varphi,$$

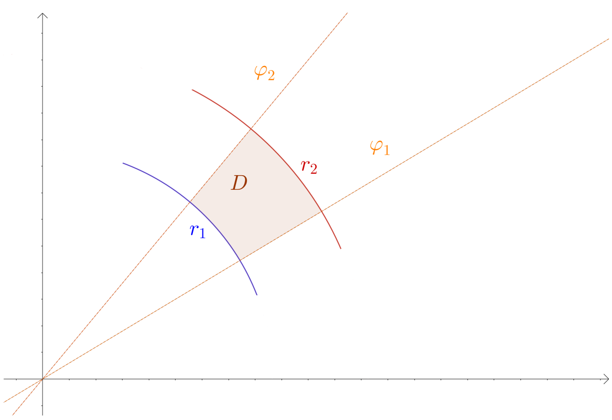
čime smo dobili poveznicu Kartezijevih i polarnih koordinata.



Slika 5.7: Poveznica Kartezijevih i polarnih koordinata

Dodatno, uz osnovni trigonometrijski identitet, vrijedi da je:

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2.$$



Nadalje, može se dobiti formula za površinu područja omeđenog krivuljama $r_1(\varphi)$ i $r_2(\varphi)$ (radi jednostavnosti ovisnost o φ kasnije nećemo pisati):

$$P(D) = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)\right)\,d\varphi.$$

Vratimo se sada na zadatak. Potrebno je kružnicu $x^2 + y^2 = 2x + 2y$ izraziti u "jeziku" polarnih koordinata.

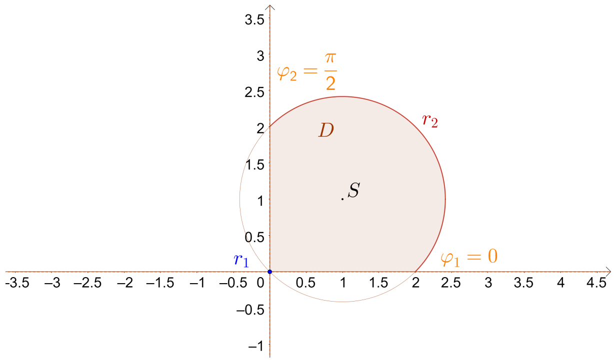
$$x^2 + y^2 = 2x + 2y$$

$$r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = 2r \cos \varphi + 2r \sin \varphi$$

$$r^2 = 2r(\cos \varphi + \sin \varphi) \quad / : r$$

$$r = 2 \cos \varphi + 2 \sin \varphi$$

$$r_2 = 2 \cos \varphi + 2 \sin \varphi$$



Slika 5.8: Područje D

Po formuli je:

$$\begin{aligned}
P(D) &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((2 \cos \varphi + 2 \sin \varphi)^2 - 0^2 \right) \, d\varphi = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4 \cos^2 \varphi + 8 \cos \varphi \sin \varphi + 4 \sin^2 \varphi \right) \, d\varphi = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 + 8 \cos \varphi \sin \varphi) \, d\varphi = 2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, d\varphi + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi \right) = \\
&= 2 \left(\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi \right) = \begin{bmatrix} t = \sin \varphi & \varphi_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \sin 0 = 0 \\ dt = \cos \varphi \, d\varphi & \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_2 = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{bmatrix} = \\
&= 2 \left(\frac{\pi}{2} - 0 + 2 \int_0^1 t \, dt \right) = 2 \left(\frac{\pi}{2} + 2 \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 \right) = \pi + 2.
\end{aligned}$$

e) Obje zadane krivulje su kružnice. Radi se o kružnici $(x+4)^2 + y^2 = 16$ koja ima središte u $(-4, 0)$ i radijusa je $r = 4$ te kružnici $(x+2)^2 + y^2 = 4$ sa središtem u $(-2, 0)$ radijusa $r = 2$.

$$x^2 + y^2 + 8x = 0 \qquad\qquad x^2 + y^2 + 4x = 0$$

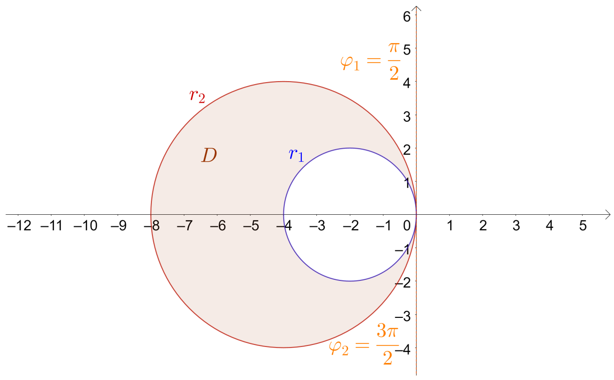
$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi + 8r\cos\varphi = 0 \qquad\qquad r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi + 4r\cos\varphi = 0$$

$$r^2 + 8r\cos\varphi = 0 \qquad\qquad r^2 + 4r\cos\varphi = 0$$

$$r(r + 8\cos\varphi) = 0 \quad /:\ r \qquad\qquad r(r + 4\cos\varphi) = 0 \quad /:\ r$$

$$r = -8\cos\varphi \qquad\qquad r = -4\cos\varphi$$

$$r_2 = -8\cos\varphi \qquad\qquad r_1 = -4\cos\varphi$$



Slika 5.9: Područje D

$$P(D) = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left((-8\cos\varphi)^2 - (-4\cos\varphi)^2\right)\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (64\cos^2\varphi - 16\cos^2\varphi)\, d\varphi =$$

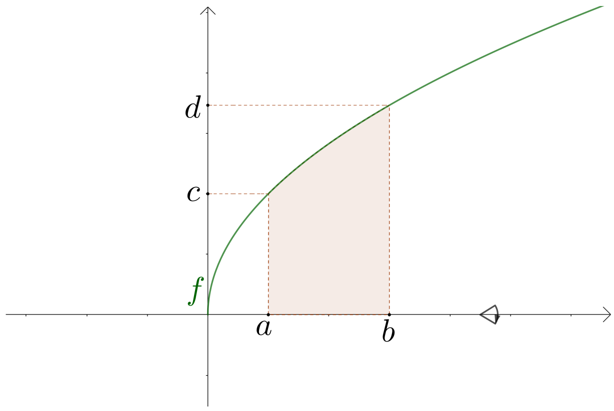
$$= 24\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi = 24\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\varphi)}{2}\, d\varphi = 12\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (1+\cos(2\varphi))\, d\varphi =$$

$$= 12\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin(2\varphi)\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 12\pi$$

5.2 Volumen

Osim površina pomoću integrala lagano računamo i volumen rotacijskih tijela. Lik u koordinatnom sustavu možemo rotirati oko osi x, y ili nekog drugog zadanog pravca.

Rotacija oko osi x

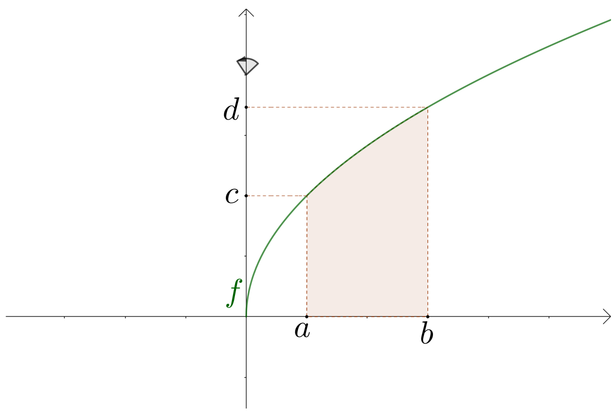


Slika 5.10: Primjer lika koji rotira oko osi x

Funkciju f možemo iskazati u varijabli x ili varijabli y, ovisno kako smo u zadatku procijenili da će nam biti lakše. Sukladno tome, imamo dvije formule:

$$V_x = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx, \quad V_x = 2\pi \int_c^d y g(y) \, dy.$$

Rotacija oko osi y



Slika 5.11: Primjer lika koji rotira oko osi y

Funkciju f ponovno možemo iskazati u varijabli x ili y pa imamo dvije formule:

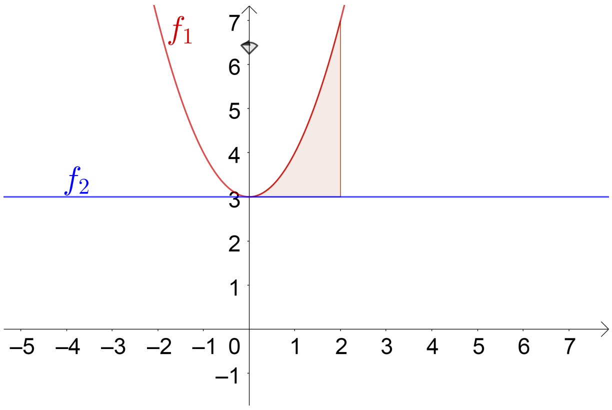
$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) \, dx, \quad V_y = \pi \int_c^d g(y)^2 \, dy.$$

Zadatak 5.2.1. (Zadatak s kolokvija)
Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom oko osi y lika omeđenog krivuljom $y = x^2 + 3$ te pravcima $y = 3$ i $x = 2$.

Rješenje. Zadatku možemo pristupiti na dva načina.

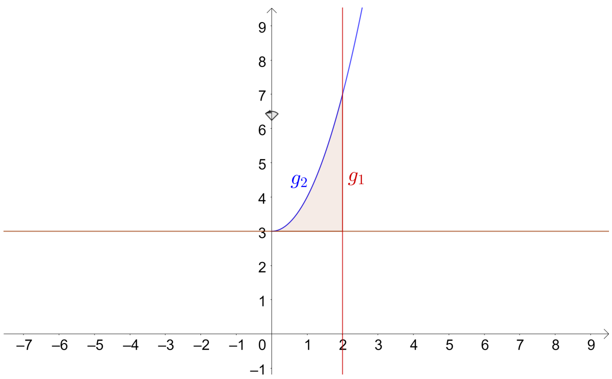
1. način: funkcije izrazimo u varijabli x. Volumen tijela koje dobijemo rotacijom lika

razlika je dvaju volumena, onog određenog s $f_1(x) = x^2 + 3$ i onog određenog s $f_2(x) = 3$ za $x \in [0, 2]$.



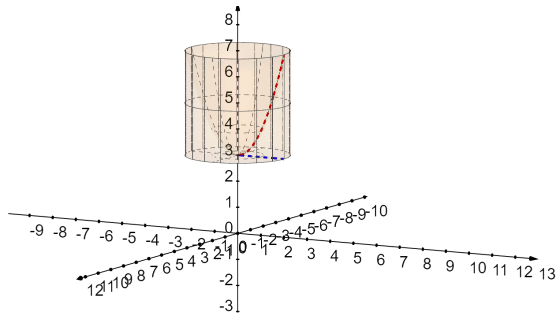
$$V_y = 2\pi \int_0^2 x(x^2+3)\,dx - 2\pi \int_0^2 x \cdot 3\,dx = 2\pi \int_0^2 (x^3+3x)\,dx - 2\pi \int_0^2 3x\,dx =$$
$$= 2\pi \left(\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_0^2 - 2\pi \cdot 3\frac{x^2}{2} \Bigg|_0^2 = 8\pi$$

2. način: funkcije izrazimo u varijabli y. Volumen rotacijskog tijela je ponovno razlika dvaju volumena, onog određenog s $g_1(y) = 2$ i onog određenog s $g_2(y) = \sqrt{y-3}$ za $y \in [3, 7]$.



$$V_y = \pi \int_3^7 2^2\,dy - \pi \int_3^7 \sqrt{y-3}^2\,dy = 4\pi y \Bigg|_3^7 - \pi \left(\frac{y^2}{2} - 3y \right) \Bigg|_3^7 = 8\pi$$

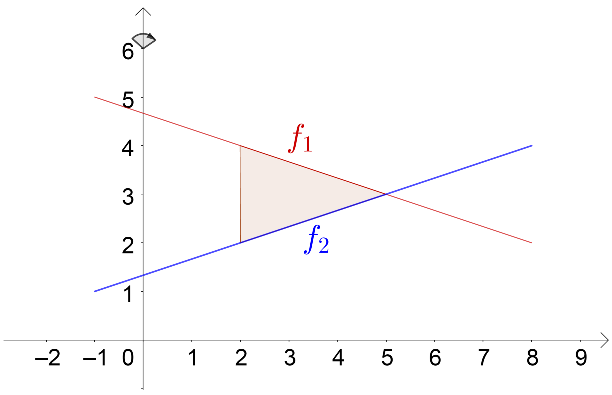
Tijelo koje dobivamo rotacijom prikazano je na sljedećoj slici.



Zadatak 5.2.2. Pravci $y = -\frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$, $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ i $x = 2$ zatvaraju lik koji rotira oko osi y. Izračunajte volumen tako dobivenog tijela.

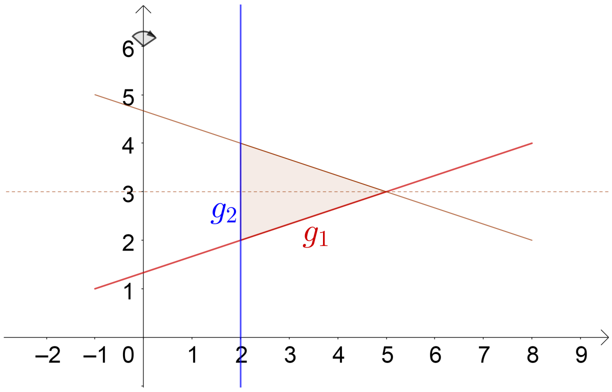
Rješenje. 1. način: u varijabli x kao razlika volumena.

Dobivamo sljedeću skicu pri čemu smo označili: $f_1(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$ i $f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.



$$V_y = 2\pi \int_2^5 x \left(-\frac{1}{3}x + \frac{14}{3}\right) dx - 2\pi \int_2^5 x \left(\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right) dx =$$
$$= 2\pi \left(-\frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + \frac{14}{3}\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_2^5 - 2\pi \left(\frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + \frac{4}{3}\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_2^5 = 18\pi$$

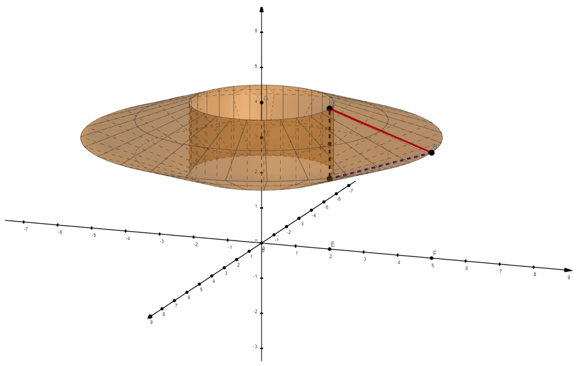
2. način: u varijabli y kao razliku volumena. Dobiveni lik je jednakokračan trokut pa možemo volumen računati kao dvostruki volumen samo jedne polovice rotacijskog tijela pri čemu je $g_1(y) = 3y - 4$, a $g_2(y) = 2$.



$$V_y = 2\left(\pi\int_2^3 (3y-4)^2\,dy - \pi\int_2^3 2^2\,dy\right) = \begin{bmatrix} t = 3y-4 & y_1 = 2 \Rightarrow t_1 = 2 \\ dt = 3\,dy & y_2 = 3 \Rightarrow t_2 = 5 \end{bmatrix} =$$

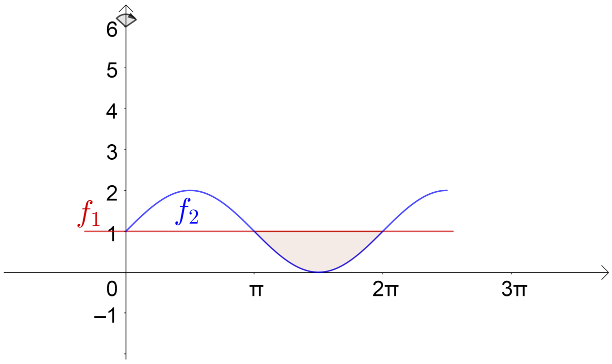
$$= 2\pi\left(\frac{1}{3}\int_2^5 t^2\,dt - \int_2^3 4\,dy\right) = 2\pi\left(\frac{1}{3}\frac{t^3}{3}\Bigg|_2^5 - 4y\Bigg|_2^3\right) = 18\pi$$

Tijelo koje dobivamo rotacijom prikazano je na sljedećoj slici.



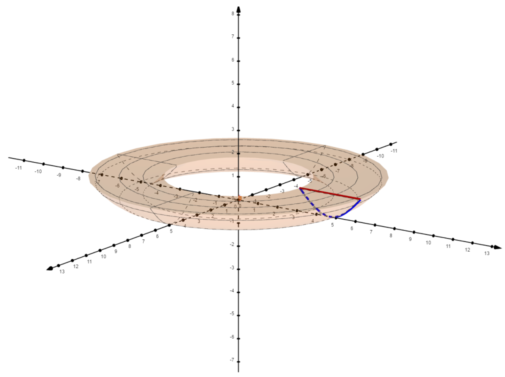
Zadatak 5.2.3. Odredite volumen tijela nastalog rotacijom oko osi y područja omeđenog s $1+\sin x \le y \le 1$, za $\pi \le x \le 2\pi$.

Rješenje. Traženi volumen dobiva se kao razlika volumena tijela koje se dobije rotacijom lika ispod funkcije $f_1(x) = 1$ i volumena tijela koje se dobije rotacijom lika ispod funkcije $f_2(x) = 1 + \sin x$ i to za $x \in [\pi,\, 2\pi]$.



$$
\begin{aligned}
V_y &= 2\pi \int_{\pi}^{2\pi} x \cdot 1 \, dx - 2\pi \int_{\pi}^{2\pi} x(1 + \sin x) \, dx = \\
&= 2\pi \frac{x^2}{2} \Bigg|_{\pi}^{2\pi} - 2\pi \left(\int_{\pi}^{2\pi} x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} x \sin x \, dx \right) = \begin{bmatrix} u = x & dv = \sin x \, dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{bmatrix} = \\
&= 3\pi^3 - 2\pi \left(\frac{x^2}{2} \Bigg|_{\pi}^{2\pi} + x(-\cos x) \Bigg|_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} (-\cos x) \, dx \right) = \\
&= 3\pi^3 - 2\pi \left(\frac{3\pi^2}{2} - 3\pi + \sin x \Bigg|_{\pi}^{2\pi} \right) = 6\pi^2
\end{aligned}
$$

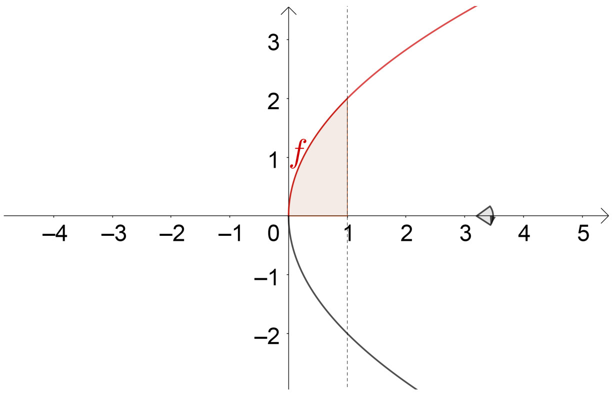
Tijelo koje dobivamo rotacijom prikazano je na sljedećoj slici.



Kad bismo htjeli riješiti ovaj zadatak u varijabli y, javio bi se inverz funkcije $f(x) = \sin x$ pa zbog kompleksnosti taj način ovdje nećemo razmatrati.

Zadatak 5.2.4. Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom oko osi x područja omeđenog s $y^2 = 4x$ i $x = 1$.

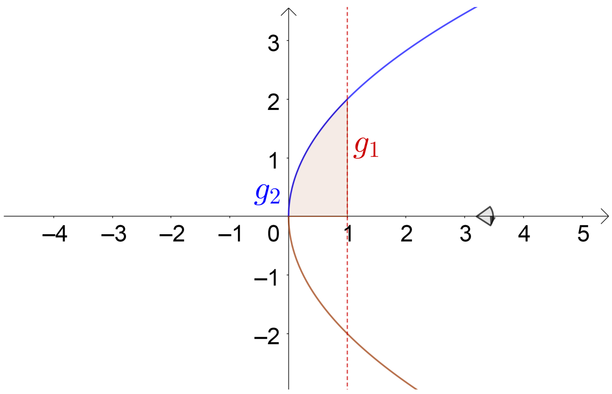
Rješenje. Ovdje je dovoljno rotirati samo osječani dio jer ako rotiramo cijeli lik, imamo nepotrebno poklapanje. Zadatak ćemo riješiti na dva načina.



1. način: u varijabli x izrazimo gornju granu parabole $f(x) = \sqrt{4x}$.

$$V_x = \pi \int_0^1 f(x)^2 \, dx = \pi \int_0^1 \sqrt{4x}^2 \, dx = 4\pi \int_0^1 x \, dx = 4\pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 2\pi$$

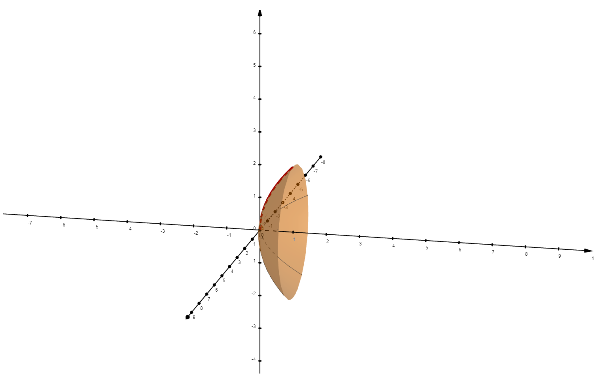
2. način: u varijabli y.



U tom se slučaju radi o razlici dvaju volumena koji se dobiju rotacijom područja određenih krivuljama $g_1(y) = 1$, odnosno $g_2(y) = \frac{y^2}{4}$.

$$V_x = 2\pi \int_0^2 y \cdot 1 \, dy - 2\pi \int_0^2 y \cdot \frac{y^2}{4} \, dy = 2\pi \frac{y^2}{2} \Big|_0^2 - \frac{\pi}{2} \frac{y^4}{4} \Big|_0^2 = 2\pi$$

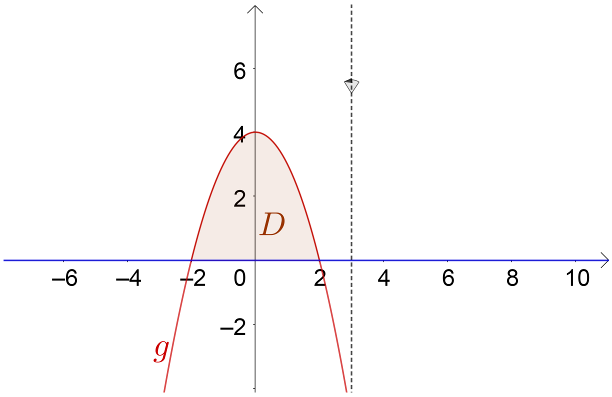
Tijelo koje dobivamo rotacijom prikazano je na sljedećoj slici.



Zadatak 5.2.5. Dodatni zadatak - rotacija oko zadanog pravca

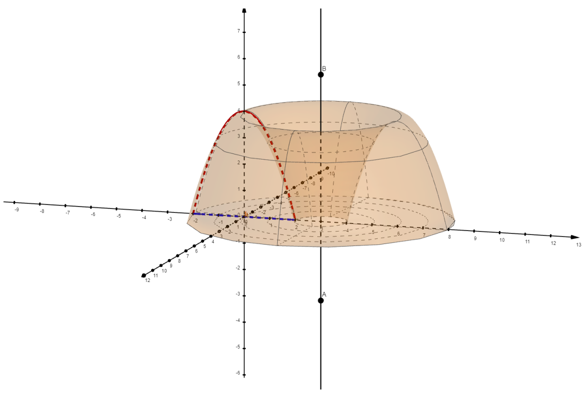
Lik omeđen s $y = 4 - x^2$ i osi x rotira oko pravca $x = 3$. Odredite volumen rotacijskog tijela.

Rješenje. Zbog rotacije oko pravca $x = 3$ potrebno je napraviti pomak koordinatnog sustava udesno što ostvarujemo oduzimanjem broja 3 u podintegralnoj funkciji.



$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^4 (-\sqrt{4-y} - 3)^2 \, dy - \pi \int_0^4 (\sqrt{4-y} - 3)^2 \, dy = \\
&= \pi \left[\int_0^4 (4 - y + 6\sqrt{4-y} + 9) \, dy - \int_0^4 (4 - y - 6\sqrt{4-y} + 9) \, dy \right] = \\
&= \pi \int_0^4 12\sqrt{4-y} \, dy = \begin{bmatrix} t = 4 - y & y_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 4 \\ dt = -dy & y_2 = 4 \Rightarrow t_2 = 0 \end{bmatrix} = \pi \int_4^0 12\sqrt{t} \cdot (-dt) = \\
&= -12\pi \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_4^0 = 64\pi
\end{aligned}
$$

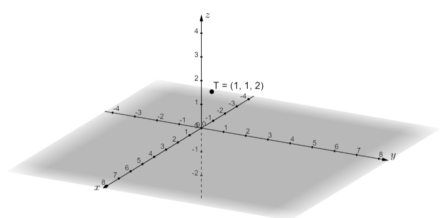
Tijelo koje dobivamo rotacijom prikazano je na sljedećoj slici.



Poglavlje 7

Funkcije dvije varijable

Dosad smo radili s funkcijama jedne varijable, odnosno s funkcijama koje su varijabli x pridruživale vrijednost $f(x)$ po pravilu preslikavanja f (oznaka: $x \mapsto f(x)$). U tom smo slučaju $f(x)$ označavali s y jer je ta vrijednost odgovarala y koordinati točaka koje su činile graf funkcije f.
Odsad nadalje bavit ćemo se i funkcijama dvije varijable (i to realnim funkcijama realnih varijabla) kod kojih varijablama x i y, tj. uređenom paru (x, y) pridružujemo vrijednost $f(x, y)$. Vrijednost $f(x, y)$ označavamo i sa z jer odgovara z koordinati točaka koje čine graf od f u trodimenzionalnom koordinatnom sustavu. Radi se o desnom sustavu (palac desne ruke je x os, kažiprst y os, a os z orijentirana je iz dlana.



Slika 7.1: Trodimenzionalni koordinatni sustav

7.1 Domena

Prisjetimo se, domena je područje definicije funkcije. U slučaju funkcije dvije varijable to su vrijednosti x i y koje smijemo uvrstiti da bismo izračunali $f(x, y)$. Ograničenja na domenu su:

1. KORIJEN - izraz ispod korijena je nenegativan,
2. NAZIVNIK - izraz u nazivniku je različit od 0,
3. LOGARITAM - izraz pod logaritmom je strogo pozitivan te je izraz u bazi logaritma strogo pozitivan i različit od 1,
4. "SPECIJALNE" FUNKCIJE - inverzna funkcija funkcije sinus i kosinus ima za domenu interval $[-1, 1]$ jer je slika funkcije sinus i kosinus interval $[-1, 1]$.

Između uvjeta uvijek stavljamo veznik "i" koji označava skupovnu operaciju presjek. Rješenja navedenih nejednadžbi crtamo u koordinatnom sustavu.

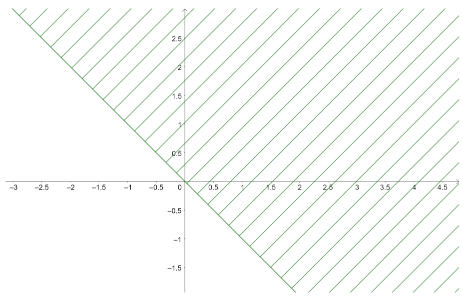
Zadatak 7.1.1. Grafički predočite domenu funkcije $f(x, y) = \sqrt{x + 1 - \sqrt{x + y}}$.

Rješenje. Funkciju čine dva korijena pa su uvjeti na domenu sljedeći:

1. $x + y \geq 0$,
2. $x + 1 - \sqrt{x + y} \geq 0$.

Najprije rješavamo prvi uvjet.

$$x + y \geq 0$$
$$y \geq -x$$



Slika 7.2: Rješenje prvog uvjeta

Dio ravnine iznad pravca $y = -x$ uključujući i pravac.

Nadalje, analiziramo drugi uvjet.

$$\sqrt{x + y} \leq x + 1$$

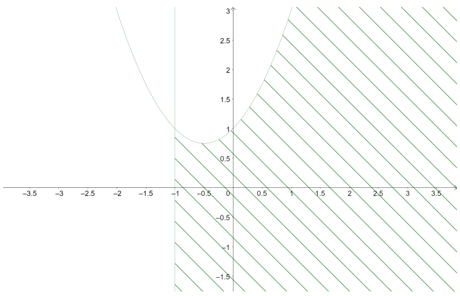
Ovu nejednadžbu bismo trebali kvadrirati, ali ne znamo kakvog je predznaka izraz na desnoj strani jer ovisi o x (za neke x je pozitivan, a za neke je negativan). Zato razlikujemo dva slučaja. Između slučajeva uvijek pišemo veznik "ili" koji označava skupovnu uniju.

2.1.

$$x+1<0,\ \text{tj. } x<-1$$

$$\sqrt{x+y}\leq x+1$$

U ovom slučaju imamo da je iznos korijena manji od nečega što je negativno. Zato je ovaj slučaj nemoguć.



Slika 7.3: Rješenje drugog uvjeta

2.2.

$$x+1\geq 0,\ \text{tj. } x\geq -1$$

$$\sqrt{x+y}\leq x+1$$

U ovom slučaju imamo da je iznos korijena manji od nekog pozitivnog broja pa nam je dopušteno kvadrirati.

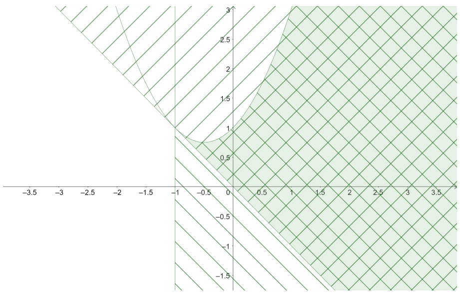
$$x+y\leq (x+1)^2$$

$$x+y\leq x^2+2x+1$$

$$y\leq x^2+x+1$$

Radi se o dijelu ravnine ispod parabole $y=x^2+x+1$, ali uzimajući uvjet slučaja u obzir, samo za $x\geq -1$, uključujući i parabolu.

Konačno rješenje dobijemo kao presjek rješenja prvog i drugog uvjeta.



Slika 7.4: Domena funkcije f

Zadatak 7.1.2. Grafički predočite domenu funkcije $f(x,y)=\sqrt{x+\sqrt{y-x}}$.

Rješenje. Uvjeti na domenu su sljedeći:

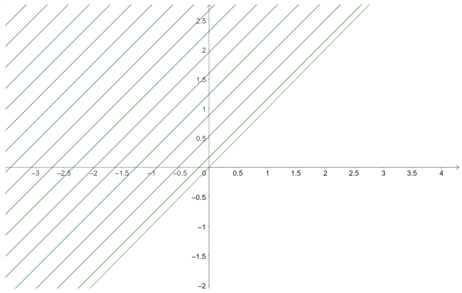
1. $y-x\geq 0$,

2. $x+\sqrt{y-x}\geq 0$.

Promotrimo prvi uvjet.

$$y - x \geq 0$$
$$y \geq x$$

Prvi uvjet opisuje dio ravnine iznad pravca $y = x$, uključujući i sam pravac.



Slika 7.5: Rješenje prvog uvjeta

Analiziramo drugi uvjet.

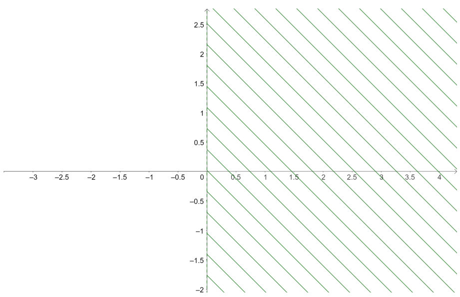
$$x + \sqrt{y - x} \geq 0$$
$$\sqrt{y - x} \geq -x$$

Kao i ranije, potrebno je diskutirati dva slučaja.

2.1.

$$\frac{-x < 0, \text{ tj. } x > 0}{\sqrt{y - x} \geq -x}$$

Ova nejednakosti je uvijek istinita jer je vrijednost koju dobijemo korjenovanjem uvijek veća od negativnog broja. Dakle, rješenje su sve točke oblika (x, y) kod kojih je $x > 0$, a $y \in \mathbb{R}$.



Slika 7.6: Rješenje drugog uvjeta (prvi dio)

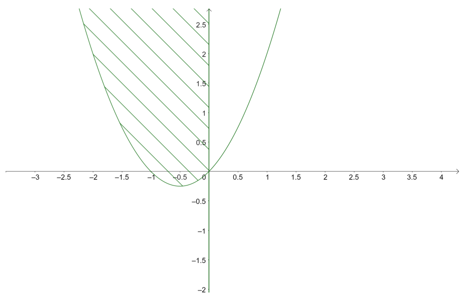
2.2.

$$\frac{-x \geq 0, \text{ tj. } x \leq 0}{\sqrt{y - x} \geq -x}$$

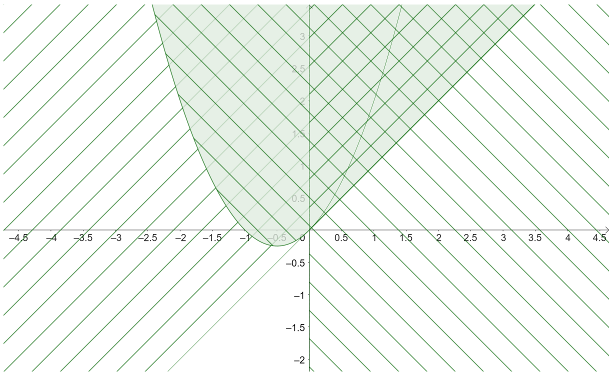
Kvadriranjem navedenog izraza dobivamo

$$y - x \geq x^2$$
$$y \geq x^2 + x.$$

Rješenje je dio ravnine iznad parabole $y = x^2 + x$, uključujući i parabolu, ali samo za one točke kod kojih je $x \leq 0$.



Slika 7.7: Rješenje drugog uvjeta (drugi dio)



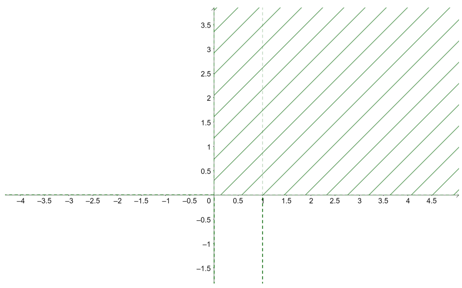
Slika 7.8: Domena funkcije f

Zadatak 7.1.3. Grafički predočite domenu funkcije $f(x,y) = \sqrt{1 - \log_x^2 y}$.

Rješenje. Imamo tri uvjeta na domenu.

1. $1 - \log_x^2 y \geq 0$
2. $y > 0$
3. $x > 0$ i $x \neq 1$

Drugi i treći uvjet su do kraja sređeni te predstavljaju točke u 1. kvadrantu bez točaka na osima i bez točaka koje su pravcu $x = 1$.



Slika 7.9: Rješenje drugog i trećeg uvjeta

Prvi uvjet potrebno je dodatno razraditi.

$$1 - \log_x^2 y \geq 0$$
$$(\log_x y)^2 \leq 1$$
$$|\log_x y| \leq 1$$

Razlikujemo dva slučaja zbog različitog ponašanja logaritamske funkcije za vrijednost baze veće od 1, odnosno baze između 0 i 1.

1.1.

$$x > 1$$

$$|\log_x y| \leq 1$$

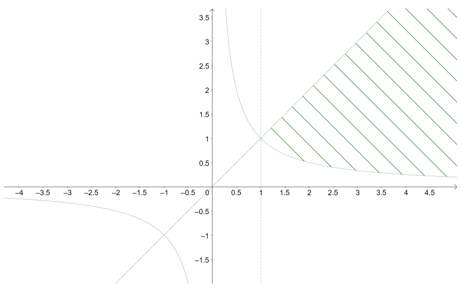
$$-1 \leq \log_x y \leq 1$$

$$-\log_x x^{-1} \leq \log_x y \leq \log_x x$$

Budući da je za $x > 1$ logaritamska funkcija rastuća, slijedi:

$$\frac{1}{x} \leq y \leq x,$$

što predstavlja točke čiji je $x > 1$, a nalaze se između pravca $y = x$ i hiperbole $y = \frac{1}{x}$, uključujući i njih.



Slika 7.10: Rješenje prvog uvjeta (prvi dio)

1.2.

$$0 < x < 1$$

$$|\log_x y| \leq 1$$

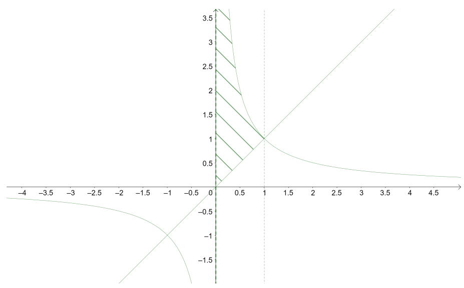
$$-1 \leq \log_x y \leq 1$$

$$\log_x x^{-1} \leq \log_x y \leq \log_x x$$

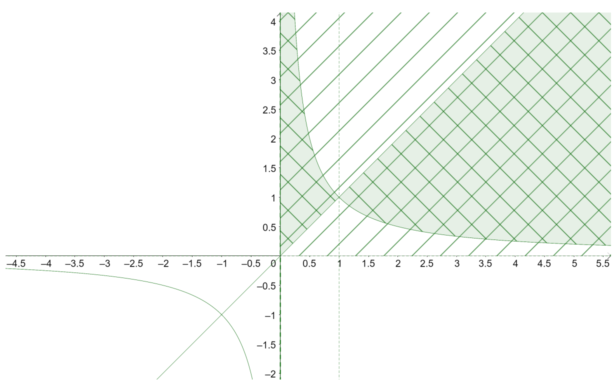
Budući da je za $0 < x < 1$ logaritamska funkcija padajuća, slijedi:

$$\frac{1}{x} \geq y \geq x,$$

što predstavlja točke čiji je $x \in \langle 0, 1 \rangle$, a nalaze se između pravca $y = x$ i hiperbole $y = \frac{1}{x}$, uključujući i njih.



Slika 7.11: Rješenje prvog uvjeta (drugi dio)



Slika 7.12: Domena funkcije f

Zadatak 7.1.4. (Zadatak s kolokvija)

Grafički predočite domenu funkcije $f(x,y) = \ln{(x-1)^2} + \dfrac{\ln\sqrt{2}}{\sqrt{(x^2+y^2-2x+2y+1)(y-2x+3)}}$.

Rješenje. Uvjeti na domenu su:

1. $(x-1)^2 > 0$,
2. $(x^2+y^2-2x+2y+1)(y-2x+3) \geq 0$,
3. $(x^2+y^2-2x+2y+1)(y-2x+3) \neq 0$.

Izraz $(x-1)^2$ je nenegativan za svaki x pa je onda strogo pozitivan za $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Drugi i treći uvjet možemo objediniti u jedan uvjet:

$$(x^2+y^2-2x+2y+1)(y-2x+3) > 0.$$

Njega raspisujemo na dva moguća slučaja.

$$x^2+y^2-2x+2y+1 > 0$$
$$y-2x+3 > 0$$

$$x^2+y^2-2x+2y+1 > 0$$
$$(x-1)^2+(y+1)^2 > 1$$

$$y-2x+3 > 0$$
$$y > 2x-3$$

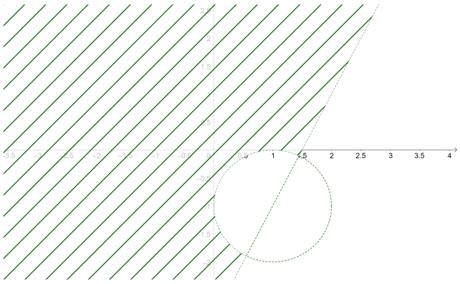
Radi se o vanjštini kruga radijusa 1 sa središtem u $(1,-1)$ presječenoj s dijelom ravnine iznad pravca $y = 2x-3$ (bez samog pravca i kružnice).

$$x^2+y^2-2x+2y+1 < 0$$
$$y-2x+3 < 0$$

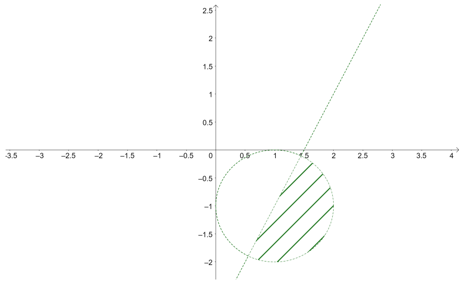
$$x^2+y^2-2x+2y+1 < 0$$
$$(x-1)^2+(y+1)^2 < 1$$

$$y-2x+3 < 0$$
$$y < 2x-3$$

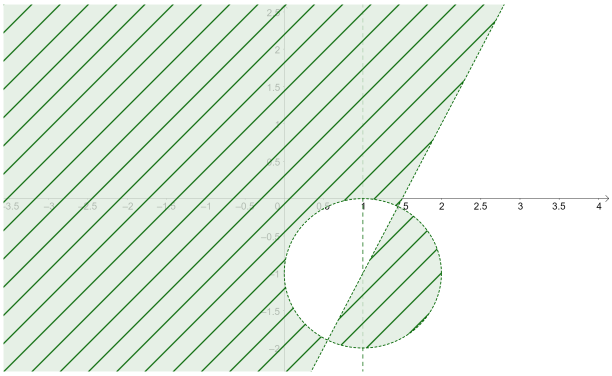
Radi se o krugu radijusa 1 sa središtem u $(1,-1)$ presječenom s dijelom ravnine ispod pravca $y = 2x-3$ (bez samog pravca i kružnice).



Slika 7.13: Rješenje uvjeta (prvi dio)



Slika 7.14: Rješenje uvjeta (drugi dio)



Slika 7.15: Domena funkcije f

Zadatak 7.1.5. (Zadatak s kolokvija)
Grafički predočite domenu funkcije $f(x,y) = \arcsin\left(x^2 - 4x + y^2 - 2y\right) + \dfrac{5}{\sqrt{2x+2y-6}}$.

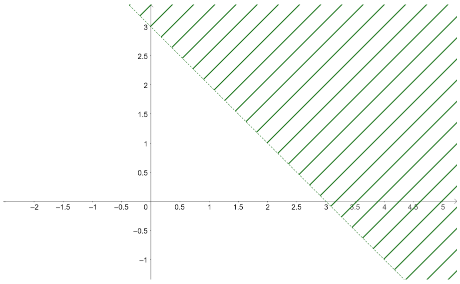
Rješenje. Uvjeti na domenu su:

1. $-1 \leq x^2 - 4x + y^2 - 2y \leq 1$,
2. $2x + 2y - 6 \geq 0$,
3. $2x + 2y - 6 \neq 0$.

Drugi i treći uvjet možemo objediniti u jedan uvjet:

$$\begin{aligned} 2x + 2y - 6 &> 0 \\ 2y &> -2x + 6 \\ y &> -x + 3, \end{aligned}$$

koji označava dio ravnine iznad pravca $y = -x + 3$ (bez pravca).



Slika 7.16: Rješenje drugog i trećeg uvjeta

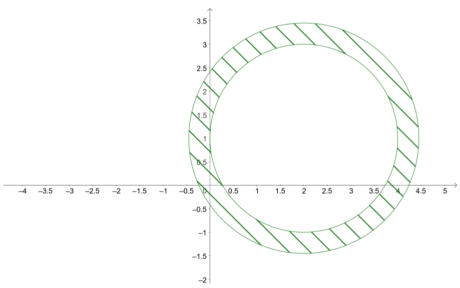
Prvi uvjet je potrebno razraditi.

$$-1 \leq x^2 - 4x + y^2 - 2y \leq 1$$

$$-1 \leq (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) - 5 \leq 1$$

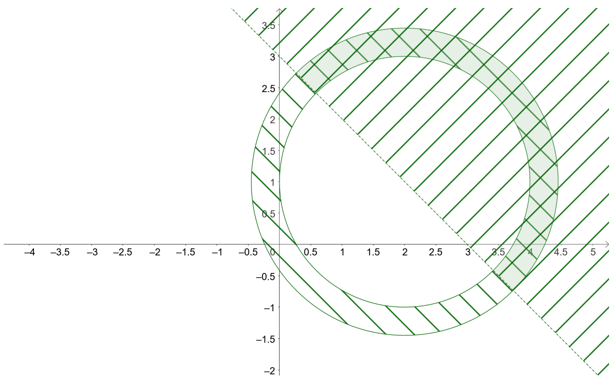
$$4 \leq (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 6$$

Radi se o kružnom vijencu, tj. dijelu ravnine između koncentričnih kružnica radijusa $\sqrt{6}$ i 2 sa središtem u $(2,1)$, uključujući i kružnice.



Slika 7.17: Rješenje prvog uvjeta

Konačno rješenje je presjek svih uvjeta.



Slika 7.18: Domena funkcije f

7.2 Parcijalne derivacije

Kod funkcija jedne varijable definirali smo pojam derivacije. Kod funkcija dvije varijable nije jasno po kojoj varijabli trebamo derivirati zbog toga definiramo pojam parcijalne derivacije. Parcijalna derivacija funkcije $f(x, y)$ po varijabli x je funkcija koju dobijemo deriviranjem funkcije $f(x, y)$ pri čemu varijablu y smatramo konstantom. Oznaka za parcijalnu derivaciju po x je $\frac{\partial f}{\partial x}$ ili f_x. Parcijalna derivacija funkcije $f(x, y)$ po varijabli y je funkcija koju dobijemo deriviranjem funkcije $f(x, y)$ pri čemu varijablu x smatramo konstantom. Oznaka za parcijalnu derivaciju po y je $\frac{\partial f}{\partial y}$ ili f_y. Takve derivacije zovemo parcijalne derivacije 1. reda jer su poopćenje prve derivacije funkcije jedne varijable. Sukladno tome, postoje i parcijalne derivacije drugog, trećeg i višeg reda.

Za funkciju dvije varijable postoje dvije parcijalne derivacije 1. reda, zatim četiri parcijalne derivacije 2. reda, osam parcijalnih derivacija 3. reda itd. Parcijalne derivacije drugog reda označavamo:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Derivacije f_{yx} i f_{xy} zovemo još i mješovite parcijalne derivacije.

Zadatak 7.2.1. Izračunajte $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ te odredite $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 4)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(1, -1)$ ako je:

a) $f(x, y) = x^3 - y + 2x^3y^2$, b)$f(x, y) = e^{x-2y}$, c) $f(x, y) = x^4 \sin(x^3y)$,
d) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, e) $f(x, y) = x^2e^{xy}$.

Rješenje.

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 0 + 2y^2 \cdot 3x^2 = 3x^2 + 6x^2y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 - 1 + 2x^3 \cdot 2y = 4x^3y - 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 4) = 3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1^2 \cdot 4^2 = 99$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) = 4 \cdot 1^3 \cdot (-1) - 1 = -5$$

b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x-2y} \cdot (x-2y)' = e^{x-2y} \quad (' \text{ označava derivaciju po } x)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x-2y} \cdot (x-2y)' = -2e^{x-2y} \quad (' \text{ označava derivaciju po } y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,4) = e^{-7}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = -2e^{3}$$

c)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x^4)' \cdot \sin(x^3 y) + x^4 \cdot (\sin(x^3 y))' = 4x^3 \sin(x^3 y) + 3x^6 y \cos(x^3 y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^4 \cdot \cos(x^3 y) \cdot x^3 = x^7 \cos(x^3 y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,4) = 4\sin 4 + 12\cos 4$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = \cos 1$$

d)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot (-1) y x^{-2} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,4) = -\frac{4}{17}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = \frac{1}{2}$$

e)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x^2)' \cdot e^{xy} + x^2 \cdot (e^{xy})' = 2x^2 e^{xy} + x^2 y e^{xy} = e^{xy}(2x^2 + x^2 y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 e^{xy} x = x^3 e^{xy}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,4) = 6e^{4}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = e^{-1}$$

Zadatak 7.2.2. Odredite parcijalne derivacije drugog reda funkcije $f(x,y) = x^2 y^3 + x^4 y$.

Rješenje. Najprije računamo derivacije prvog reda, zatim iz njih derivacije drugog reda.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2xy^3 + 4x^3y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy^3 + 4x^3y\right) = \\
&= 2y^3 + 12x^2y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy^3 + 4x^3y\right) = \\
&= 6xy^2 + 4x^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 3x^2y^2 + x^4 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y^2 + x^4\right) = \\
&= 6x^2y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y^2 + x^4\right) = \\
&= 6xy^2 + 4x^3
\end{aligned}$$

Napomena 7.2.3. Mješovite parcijalne derivacije su međusobno jednake (Schwarzov teorem).

7.3 Parcijalne derivacije implicitno zadane funkcije

Funkcija, kako smo je uobičajeno dosad zadavali, zadana je eksplicitno, npr. $f(x,y) = x^2y + y^2$ (jasno je vidljivo iz zapisa da se radi o pridruživanju izraza $x^2y + y^2$ k uređenom paru (x,y)). Osim na taj način funkciju možemo zadati i implicitno, npr. $x^2 + f(x,y)\cdot\sin(xy + f(x,y)) = 0$. Tada nije odmah očito koji izraz se pridružuje uređenom paru (x,y). Ponekad je ipak i iz takvog izraza moguće izraziti $f(x,y)$, no ponekad je to nemoguće. Često u takvom zapisu umjesto $f(x,y)$ pišemo novu varijablu z, no pritom ne smijemo zaboraviti da z ovisi o x i y (z nije nezavisna varijabla kao što su x i y). Izraz u tom slučaju glasi $x^2 + z\sin(xy+z) = 0$, $z = f(x,y)$.
Prirodno se nameće pitanje kako deriviramo takve funkcije.
Uvodimo novu funkciju $F(x,y,z)$ gdje su sve tri varijable nezavisne. U izrazu, kojim smo implicitno zadali funkciju, sve prebacimo na lijevu strani i definiramo F kao izraz na lijevoj strani.

$$F(x,y,z) = x^2 + z\sin(xy+z)$$

Tada je

$$z_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad z_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Važno je zapamtiti da kod F simbol z predstavlja nezavisnu varijablu, a kod f simbol z ovisi o x i y.

Zadatak 7.3.1. Odredite $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ implicitno zadane funkcije $xz^2 + x^2 + 2x + y^2 + 4 = 0$, $z = f(x,y)$.

Rješenje. Definiramo novu funkciju $F(x, y, z) = xz^2 + x^2 + 2x + y^2 + 4$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) &= z^2 + 2x + 2 + 0 + 0 = z^2 + 2x + 2 \\
\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) &= 0 + 0 + 0 + 2y + 0 = 2y \\
\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) &= x \cdot 2z + 0 + 0 + 0 + 0 = 2xz
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-z^2 - 2x - 2}{2xz}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-2y}{2xz} = \frac{-y}{xz}$$

Zadatak 7.3.2. Odredite $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ te $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ implicitno zadane funkcije $z = \frac{x+y}{x+yz+2}$, $z = f(x, y)$.

Rješenje. $z(x + yz + 2) = x + y \Rightarrow zx + z^2 y + 2z - x - y = 0$
Definiramo novu funkciju:

$$F(x, y, z) = zx + z^2 y + 2z - x - y.$$

Njezine parcijalne derivacije su

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) &= z - 1, \\
\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) &= z^2 - 1, \\
\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) &= x + 2zy + 2.
\end{aligned}$$

$$z_x = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-z + 1}{x + 2zy + 2}, \quad z_y = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-z^2 + 1}{x + 2zy + 2}$$

U nastavku deriviramo z_x po varijabli y (oznaka ' je deriviranje po y).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{(-z + 1)' \cdot (x + 2zy + 2) - (-z + 1) \cdot (x + 2zy + 2)'}{(x + 2zy + 2)^2} = \\
&= \frac{-z_y \cdot (x + 2zy + 2) - (-z + 1) \cdot (2z_y y + 2z)}{(x + 2zy + 2)^2}
\end{aligned}$$

Vrijednost od z za $(x, y) = (0, 0)$ je $z = \frac{0+0}{0+0 \cdot z+2} = 0$.
Vrijednost od $z_y(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \frac{-0^2+1}{0+2 \cdot 0 \cdot 0+2} = \frac{1}{2}$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \frac{-\frac{1}{2} \cdot (0 + 0 + 2) - (0 + 1) \cdot (2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 + 2 \cdot 0)}{(0 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 2)^2} = -\frac{1}{4}$$

Zadatak 7.3.3. (Zadatak s kolokvija)

Funkcija je zadana implicitno izrazom:

$$ze^x + xe^2 + ye^z = 4e^2, \quad z = f(x, y).$$

Izračunajte $f_{yx}(2, 0)$.

Rješenje. Definiramo funkciju $F(x, y, z) = ze^x + xe^2 + ye^z - 4e^2$.

Njene prve parcijalne derivacije su

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) &= ze^x + e^2, \\
\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) &= e^z, \\
\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) &= e^x + ye^z.
\end{aligned}$$

$$z_x = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-ze^x - e^2}{e^x + ye^z}, \qquad z_y = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-e^z}{e^x + ye^z}$$

Vrijednost z za $x = 2$ i $y = 0$ iznosi

$$ze^2 + 2e^2 + 0 = 4e^2$$

$$ze^2 = 2e^2$$

$$z = 2.$$

$$z_y(2, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(2, 0) = \frac{-e^2}{e^2 + 0} = -1$$

U nastavku derivamo z_x po y (oznaka ' je deriviranje po y).

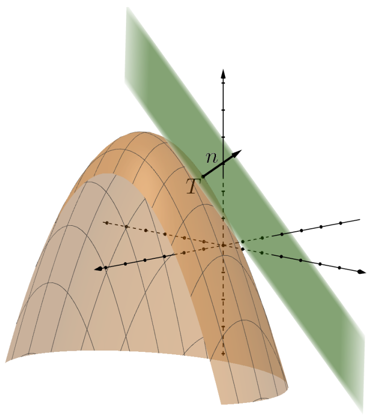
$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{(-ze^x - e^2)' \cdot (e^x + ye^z) - (-ze^x - e^2) \cdot (e^x + ye^z)'}{(e^x + ye^z)^2} = \\
&= \frac{-z_y e^x (e^x + ye^z) - (-ze^x - e^2) \cdot (1e^z + ye^z z_y)}{(e^x + ye^z)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2, 0) &= \frac{-(-1)e^2(e^2 + 0) - (-2e^2 - e^2)(e^2 + 0)}{(e^2 + 0)^2} = 4
\end{aligned}$$

Poglavlje 8

Linearna aproksimacija funkcija više varijabla, tangencijalna ravnina, diferencijal

8.1 Tangencijalna ravnina

Tangencijalna ravnina je poopćenje pojma tangente koji smo obrađivali kod funkcija jedne varijable. Graf funkcije dviju varijabli naziva se ploha u prostoru. Tangencijalna ravnina u točki plohe $T(x_0, y_0, z_0)$ je ravnina koja plohu dira u toj točki i u nekom smislu je okomita na plohu. Budući da funkciju dvije varijable možemo zadati na dva načina, implicitno i eksplicitno, zapisat ćemo i dvije formule za tangencijalnu ravninu. Tangencijalnu ravninu određuje vektor normale koji označavamo s $\vec{n}$.



Slika 8.1: Primjer tangencijalne ravnine i vektora normale u točki T

EKSPLICITNO ZADANA FUNKCIJA $z = f(x, y)$

Jednadžba ravnine u $T(x_0, y_0, z_0)$ je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) - 1 \cdot (z - z_0) = 0.$$

Vektor normale je $\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),\ -1 \right)$.

IMPLICITNO ZADANA FUNKCIJA $F(x, y, z) = 0$

Jednadžba ravnine u $T(x_0, y_0, z_0)$ je

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0.$$

Vektor normale je $\vec{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0),\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0),\ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right)$.

Zadatak 8.1.1. Odredite tangencijalnu ravninu na graf funkcije $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ u točki $T(4, 1, z_0)$.

Rješenje. Najprije izračunamo nepoznatu koordinatu točke T. Točka T je na grafu od f pa je dobijemo uvrštavanjem $z_0 = f(x_0, y_0) = f(4, 1) = 1\sqrt{4} - 1^2 - 4 + 6 \cdot 1 = 3$.

Funkcija je zadana eksplicitno pa su nam potrebne $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ u točki $(4, 1)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 0 - 1 + 0 = \frac{y}{2\sqrt{x}} - 1, \qquad & \frac{\partial f}{\partial x}(4, 1) = -\frac{3}{4} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \sqrt{x} - 2y - 0 + 6 = \sqrt{x} - 2y + 6, \qquad & \frac{\partial f}{\partial y}(4, 1) = 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) - 1 \cdot (z - z_0) &= 0 \\
-\frac{3}{4}(x - 4) + 6(y - 1) - 1(z - 3) &= 0 \\
-\frac{3}{4}x + 6y - z &= 0 \\
-3x + 24y - 4z &= 0
\end{aligned}$$

Zadatak 8.1.2. Odredite tangencijalnu ravninu u točki $T(x_0, 2, 1)$ za $x_0 > 0$ na graf funkcije $xz^2 + x^2y = 6$.

Rješenje. Najprije izračunamo nepoznatu koordinatu točke T.

$$x_0 \cdot 1^1 + x_0^2 \cdot 2 = 6$$

$$2x_0^2 + x_0 - 6 = 0$$

$$x_0 = -2, \quad x_0 = \frac{3}{2}$$

Budući da u zadatku piše da je $x_0 > 0$, biramo $x_0 = \frac{3}{2}$. Dakle, $T(\frac{3}{2}, 2, 1)$.

Primijetimo da je funkcija zadana implicitno. Definiramo $F(x, y, z) = xz^2 + x^2y - 6$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = z^2 + 2xy, \qquad \frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{3}{2}, 2, 1\right) = 7$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = x^2, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{3}{2}, 2, 1\right) = \frac{9}{4}$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 2xz, \qquad \frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{3}{2}, 2, 1\right) = 3$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0$$
$$7\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{9}{4}(y - 2) + 3(z - 1) = 0$$
$$7x + \frac{9}{4}y + 3z = 18$$
$$28x + 9y + 12z = 72$$

Zadatak 8.1.3. Na plohi $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 8$ nađite točke u kojima je tangencijalna ravnina paralelna s ravninom $y = 0$.

Rješenje. Tangencijalnu ravninu određuje njezin vektor normale. Označimo ga s $\vec{n}_T$. Zadana ravnina je $y = 0$ što znači da je $0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z = 0$, odnosno vektor normale te ravnine je $\vec{n} = (0, 1, 0)$. Budući da tražimo točke plohe u kojima su postavljene ravnine paralelne sa zadanom ravninom, vektori normala tih dviju ravnina leže na istom pravcu, tj. kolinearni su (Matematika 1 - uvjet kolinearnosti).

Ploha je zadana implicitno pa definiramo $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 8$. Označimo traženu točku s $T(x_0, y_0, z_0)$ te odredimo vektor normale tangencijalne ravnine u toj točki izražen preko koordinata točke T.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2x - 2, \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 2x_0 - 2$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 2y, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 2y_0$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = -2z, \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = -2z_0$$

Vektor normale ravnine u traženoj točki je $\vec{n_T} = (2x_0 - 2,\ 2y_0,\ -2z_0)$.

Uvjet kolinearnosti je

$$\frac{2x_0 - 2}{0} = \frac{2y_0}{1} = \frac{-2z_0}{0},$$

no zbog puno nula u vektoru normale lakše nam je uvjet kolinearnosti promatrati kao

$$(2x_0 - 2,\ 2y_0,\ -2z_0) = \lambda(0, 1, 0)$$

iz čega onda slijedi da je

$$2x_0 - 2 = 0$$

$$2y_0 = \lambda$$

$$-2z_0 = 0,$$

odnosno $x_0 = 1$, $y_0 = \frac{\lambda}{2}$, $z_0 = 0$.

Točka $T(x_0, y_0, z_0)$ leži na plohi pa zadovoljava njezinu jednadžbu.

$$x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 - 2x_0 = 8$$
$$1 + \frac{\lambda^2}{4} - 0 - 2 = 8$$
$$\lambda^2 = 36$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 6$$

$$\lambda_1 = 6 \Rightarrow y_0 = 3 \Rightarrow T(1, 3, 0)$$

$$\lambda_2 = -6 \Rightarrow y_0 = -3 \Rightarrow T(1, -3, 0)$$

Zadatak 8.1.4. (Zadatak s kolokvija)

Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu $x^2 - 4x + z^2 - yz = 5$ koja je paralelna s ravninom $2x - 3z = \pi$.

Rješenje. Vektor normale zadane ravnine je $\vec{n} = (2, 0, -3)$.

Odredimo vektor normale $\vec{n_T}$ tražene ravnine. Neka je $T(x_0, y_0, z_0)$ točka plohe u kojoj tražimo tangencijalnu ravninu. Definiramo funkciju $F(x, y, z) = x^2 - 4x + z^2 - yz - 5$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2x - 4, \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 2x_0 - 4,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = -z, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = -z_0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 2z - y, \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 2z_0 - y_0$$

Vektor normale je $\vec{n}_T = (2x_0 - 4,\ -z_0,\ 2z_0 - y_0)$.

Zapisujemo uvjet kolinearnosti

$$\frac{2x_0 - 4}{2} = \frac{-z_0}{0} = \frac{2z_0 - y_0}{-3}.$$

Zapisan na drugi način uvjet kolinearnosti je

$$(2x_0 - 4,\ -z_0,\ 2z_0 - y_0) = \lambda(2, 0, -3),$$

odnosno

$$2x_0 - 4 = 2\lambda$$

$$-z_0 = 0$$

$$2z_0 - y_0 = -3\lambda$$

pa je $z_0 = 0$, $y_0 = 3\lambda$, $x_0 = \lambda + 2$.

Točka $T(\lambda + 2,\ 3\lambda,\ 0)$ leži na plohi pa zadovoljava njezinu jednadžbu.

$$(\lambda + 2)^2 - 4(\lambda + 2) + 0 - 0 = 5$$

$$\lambda^2 = 9$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 3$$

$$\lambda_1 = 3 \Rightarrow T(5, 9, 0) \Rightarrow \vec{n}_T = (6, 0, -9)$$

$$\lambda_2 = -3 \Rightarrow T(-1, -9, 0) \Rightarrow \vec{n}_T = (-6, 0, 9)$$

Prema tome, imamo dvije takve ravnine.

$$6(x - 5) - 9(z - 0) = 0$$

$$6x - 9z = 30$$

$$-6(x + 1) + 9(z - 0) = 0$$

$$-6x + 9z = 6$$

8.2 Linearna aproksimacija funkcija dviju varijabla

Formula za računanje linearne aproksimacije funkcije dvije varijable vrlo je slična onoj koju smo radili u kolegiju Matematika 1 za funkciju jedne varijable. Prisjetimo se, tamo se približna vrijednost funkcije u točki x računala kao:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Zbog postojanja još jedne varijable ovdje imamo "dodatak" prethodno navedenoj formuli. Naime, vrijednost $f(x_0, y_0)$ potrebno je "korigirati" i u smjeru y, tj. formula glasi:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

Često označavamo s $\Delta x = x - x_0$ i $\Delta y = y - y_0$.

Zadatak 8.2.1. Koristeći linearnu aproksimaciju funkcije $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x^2y^2$, približno izračunajte $f(1.95, 2.1)$.

Rješenje.

$$x = 1.95, \quad x_0 = 2 \Rightarrow \Delta x = x - x_0 = -0.05$$
$$y = 2.1, \quad y_0 = 2 \Rightarrow \Delta y = y - y_0 = 0.1$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x - 8y^2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(2,2) = -60\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2y - 8x^2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2,2) = -60\\
f(2,2) &= -56
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(1.95, 2.1) &\approx f(2,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,2)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(2,2)\Delta y =\\
&= -56 + (-60)\cdot(-0.05) + (-60)\cdot 0.1 =\\
&= -59
\end{aligned}$$

Zadatak 8.2.2. Koristeći linearnu aproksimaciju, približno izračunajte $\sqrt[3]{5.7 + \sqrt[4]{15.8}}$.

Rješenje. Definiramo funkciju $f(x,y) = \sqrt[3]{x + \sqrt[4]{y}} = \left(x + y^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

$$x = 5.7, \quad x_0 = 6 \Rightarrow \Delta x = x - x_0 = -0.3$$
$$y = 15.8, \quad y_0 = 16 \Rightarrow \Delta y = y - y_0 = -0.2$$

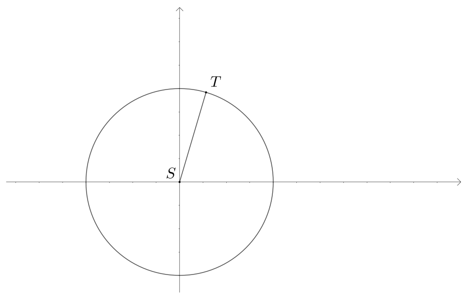
$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{3}\left(x + y^{\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\cdot\left(\sqrt[3]{x+\sqrt[4]{y}}\right)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(6,16) = \frac{1}{12}\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{3}\left(x + y^{\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{12\cdot\sqrt[4]{y^3}\left(\sqrt[3]{x+\sqrt[4]{y}}\right)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(6,16) = \frac{1}{384}\\
f(6,16) &= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(5.7, 15.8) &\approx f(6,16) + \frac{\partial f}{\partial x}(6,16)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(6,16)\Delta y =\\
&= 2 + \frac{1}{12}\cdot(-0.3) + \frac{1}{384}\cdot(-0.2) =\\
&= 2 - \frac{1}{40} - \frac{1}{1920} =\\
&= 2 - \frac{49}{1920}
\end{aligned}$$

U sljedećim zadacima također se koristi linearna aproksimacija, ali sami moramo zaključiti pomoću koje funkcije dobivamo traženu aproksimaciju.

Zadatak 8.2.3. Približno izračunajte polumjer kružnice sa središtem u ishodištu koja prolazi točkom $T(6.9, 24.2)$.

Rješenje. Polumjer je jednak udaljenosti središta S i točke T.



$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{(x_T - x_S)^2 + (y_T - y_S)^2} \\
&= \sqrt{(6.9 - 0)^2 + (24.2 - 0)^2} = \\
&= \sqrt{6.9^2 + 24.2^2}
\end{aligned}
$$

Definiramo funkciju f s $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$.

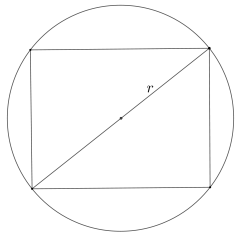
$$
\begin{aligned}
x = 6.9, &\quad x_0 = 7 \Rightarrow \Delta x = x - x_0 = -0.1 \\
y = 24.2, &\quad y_0 = 24 \Rightarrow \Delta y = y - y_0 = 0.2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(7, 24) = \frac{7}{25} \\
&\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(7, 24) = \frac{24}{25} \\
&f(7, 24) = 25
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{6.9^2 + 24.2^2} &\approx f(7, 24) + \frac{\partial f}{\partial x}(7, 24)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(7, 24)\Delta y = \\
&= 25 + \frac{7}{25} \cdot (-0.1) + \frac{24}{25} \cdot 0.2 = \\
&= 25 + \frac{41}{250}
\end{aligned}
$$

Zadatak 8.2.4. Približno izračunajte polumjer kružnice opisane pravokutniku sa stranicama $a = 6.2$, $b = 7.8$.

Rješenje. Polumjer je udaljenost od sjecišta dijagonala pravokutnika do jednog od vrhova pa je potrebno procijeniti $r = \sqrt{\left(\frac{6.2}{2}\right)^2 + \left(\frac{7.8}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6.2^2}{4} + \frac{7.8^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{6.2^2 + 7.8^2}$.



Funkciju f definiramo kao $f(x, y) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$.

$$x = 6.2, \quad x_0 = 6 \Rightarrow \Delta x = x - x_0 = 0.2$$

$$y = 7.8, \quad y_0 = 7 \Rightarrow \Delta y = y - y_0 = -0.2$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(6, 8) = \frac{3}{10} \\
&\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y = \frac{y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(6, 8) = \frac{4}{10} \\
&f(6, 8) = 5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sqrt{6.2^2 + 7.8^2} &\approx f(6, 8) + \frac{\partial f}{\partial x}(6, 8)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(6, 8)\Delta y = \\
&= 5 + \frac{3}{10} \cdot 0.2 + \frac{4}{10} \cdot (-0.2) = \\
&= 5 - \frac{1}{50}
\end{aligned}$$

Napomena 8.2.5. Zadaci s linearnom aproksimacijom mogu se zadati i kada je funkcija zadana implicitno. Tada se parcijalne derivacije of f računaju kao što smo to radili u poglavlju 7. Postupak linearne aproksimacije ide identično.

8.3 Diferencijal

Formula za diferencijal funkcije $f(x, y)$, u oznaci $df(x, y)$, je

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dy.$$

Zadatak 8.3.1. Odredite diferencijal sljedećih funkcija:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x^2y^2$, b) $f(x, y) = x^2 \cos(xy)$.

Rješenje.

a) Najprije odredimo parcijalne derivacije funkcije f.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 8y^2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 8x^2y$$

Diferencijal je

$$df(x, y) = \big(2x - 8y^2x\big)\ dx + \big(2y - 8x^2y\big)\ dy.$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x\cos(xy) + x^2 \cdot (-\sin(xy)) \cdot y = \\ &= 2x\cos(xy) - x^2y\sin(xy) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x^2 \cdot (-\sin(xy)) \cdot x = -x^3\sin(xy)\end{aligned}$$

Diferencijal je

$$df(x, y) = \big(2x\cos(xy) - x^2y\sin(xy)\big)\ dx - x^3\sin(xy)\, dy.$$

Poglavlje 9

Lokalni ekstremi

Kod funkcija jedne varijable kandidate za lokalne ekstreme dobili smo kao nultočke prve derivacije funkcije te smo potom dobivene nultočke uvrštavali u drugu derivaciju funkcije. Uz pomoć određenog kriterija zaključili smo radi li se o lokalnom minimumu ili maksimumu. Kod funkcija dvije varijable postupak je sličan samo su objekti kojima baratamo poopćeni.

Točku/točke koje dobijemo izjednačavanjem prvih parcijalnih derivacija s nulom nazivamo stacionarne ili kritične točke. Nadalje, definiramo Hesseovu matricu u stacionarnoj točki (x_0, y_0) s

$$H(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{bmatrix}.$$

Na seminarima ju kraće označavamo s

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

pri čemu je $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ i $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$. Njezinu determinatu označavamo s $\Delta = AC - B^2$.

Kao dovoljan uvjet za lokalne ekstreme navodimo sljedeći kriterij.

1.) Ako je $\Delta > 0$

   a) i $A > 0$, onda je u točki (x_0, y_0) lokalni minimum.

   b) i $A < 0$, onda je u točki (x_0, y_0) lokalni maksimum.

2.) Ako je $\Delta < 0$, onda je točka (x_0, y_0) sedlasta točka.

3.) Ako je $\Delta = 0$, onda ništa ne možemo reći o točki (x_0, y_0).

Nadalje, nužnim uvjetom nazivamo činjenicu da ako je neka točka (x_0, y_0) lokalni ekstrem, onda je ona nultočka prvih derivacija funkcije f, tj. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Zadatak 9.0.1. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$.

Rješenje. Najprije odredimo prve parcijalne derivacije od f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4y - 4x^3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4x - 4y^3.$$

Zatim odredimo stacionarne točke.

$$4y - 4x^3 = 0$$
$$4x - 4y^3 = 0$$

Iz prve jednadžbe slijedi da je $y = x^3$. Uvrstimo li y u drugu jednadžbu, imamo

$$4x - 4x^9 = 0$$
$$4x(1 - x^8) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad \text{ili} \quad x^8 = 1 \Rightarrow x_2 = 1,\ x_3 = -1.$$

Prema tome, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ i $y_3 = -1$. Stacionarne točke su $(0, 0)$, $(1, 1)$ i $(-1, -1)$.
Za kriterij potrebne su nam druge parcijalne derivacije.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -12y^2$$

Analiziramo jednu po jednu stacionarnu točku.
Za $(0, 0)$ dobivamo $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = -12 \cdot 0^2 = 0$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 4$ i $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = -12 \cdot 0^2 = 0$ te $\Delta = AC - B^2 = -16 < 0$ pa je $(0, 0)$ sedlasta točka.
Analognim uvrštavanjem za $(1, 1)$ ispada $A = -12$, $B = 4$, $C = -12$ te $\Delta = 128$. Budući da je $\Delta > 0$ i $A < 0$, u točki $(1, 1)$ je lokalni maksimum.
Za $(-1, -1)$ imamo $A = -12$, $B = 4$ i $C = -12$ te $\Delta = 128$. Kako je $\Delta > 0$ i $A < 0$, u točki $(-1, -1)$ je lokalni maksimum.

Zadatak 9.0.2. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^2 + y - e^y$.

Rješenje.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1 - e^y$$

Iz sustava

$$2x = 0$$
$$1 - e^y = 0$$

slijedi da je $x = 0$ i $y = 0$ pa je $(0,0)$ stacionarna točka.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -e^y$$

Za $(0,0)$ dobivamo da je $A = 2$, $B = 0$, $C = -1$ te $\Delta = -2 < 0$ pa se radi o sedlastoj točki te funkcija nema lokalnih ekstrema.

Zadatak 9.0.3. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$.

Rješenje. Parcijalne derivacije su

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3.$$

Stacionarne točke dobivamo iz

$$3x^2 - 3 = 0$$
$$3y^2 - 3 = 0$$

te je $x_{1,2} = \pm 1$ i $y_{1,2} = \pm 1$. Prema tome, imamo četiri stacionarne točke: $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$.

Druge parcijalne derivacije su

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y.$$

Za $(1,1)$ je $A = 6$, $B = 0$, $C = 6$ te $\Delta = 36 > 0$. Kako je i $A > 0$, radi se o lokalnom minimumu.

Za $(1,-1)$ je $A = 6$, $B = 0$, $C = -6$ te $\Delta = -36 < 0$ pa je $(1,-1)$ sedlasta točka.

Za $(-1,1)$ je $A = -6$, $B = 0$, $C = 6$ te $\Delta = -36 < 0$ pa je $(-1,1)$ sedlasta točka.

Za $(-1,-1)$ je $A = -6$, $B = 0$, $C = -6$ te $\Delta = 36 > 0$. Kako je $A < 0$, radi se o lokalnom maksimumu.

Zadatak 9.0.4. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = y \sin x$.

Rješenje. Parcijalne derivacije su

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin x.$$

Iz sustava

$$\begin{aligned} y\cos x &= 0 \\ \sin x &= 0 \end{aligned}$$

slijedi da je $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Nadalje, imamo

$$\begin{aligned} y\cos(k\pi) &= 0 \\ y \cdot (-1)^k &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

pa su stacionarne točke oblika $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ (ima ih beskonačno mnogo).

Druge parcijalne derivacije su

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -y\sin x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \cos x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

pa dobivamo da je $A = -0 \cdot \sin(k\pi) = 0$, $B = \cos(k\pi) = (-1)^k$, $C = 0$ te $\Delta = -(-1)^{2k} = -1$ jer je $2k$ paran broj za svaki $k \in \mathbb{Z}$. Sve stacionarne točke su sedlaste točke, lokalnih ekstrema nema.

Zadatak 9.0.5. Odredite lokalne ekstreme implicitno zadane funkcije $x^2 + 2y^2 + xz + z^2 - 3 = 0$, $z = f(x,y)$.

Rješenje. Definiramo funkciju $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + xz + z^2 - 3$. Parcijalne derivacije od F su

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 2x + z, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = 4y, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = x + 2z.$$

Parcijalne derivacije od f dobivamo po formulama iz Poglavlja 7 kao

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-2x - z}{x + 2z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-4y}{x + 2z}.$$

Stacionarne točke dobivamo na sljedeći način

$$\begin{aligned} \frac{-2x - z}{x + 2z} &= 0 \Rightarrow z = -2x, \\ \frac{-4y}{x + 2z} &= 0 \Rightarrow y = 0. \end{aligned}$$

Dakle, one su oblika $(x, 0, -2x)$, no kako leže na plohi zadovoljavaju njezinu jednadžbu pa imamo

$$\begin{aligned} x^2 + 2 \cdot 0^2 + x \cdot (-2x) + (-2x)^2 &= 3 \\ x^2 - 2x^2 + 4x^2 &= 3 \\ 3x^2 &= 3 \\ x_{1,2} &= \pm 1, \end{aligned}$$

iz čega slijedi da su stacionarne točke $(1, 0, -2)$ i $(-1, 0, 2)$.

Druge parcijalne derivacije dobivamo iz prvih parcijalnih po pravilu deriviranja kvocijenta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{(-2 - z_x)(x + 2z) - (-2x - z)(1 + 2z_x)}{(x + 2z)^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{0(x + 2z) - (-4y)(1 + 2z_x)}{(x + 2z)^2} = \frac{4y(1 + 2z_x)}{(x + 2z)^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{-4(x + 2z) - (-4y) \cdot 2z_y}{(x + 2z)^2}. \end{aligned}$$

Budući da za stacionarne točke vrijedi da one uvrštene u prve parcijalne derivacije daju 0, imamo da je $z_x(1,0) = z_y(1,0) = 0$ i $z_x(-1,0) = z_y(-1,0) = 0$.

Za točku $(1, 0, -2)$ dobivamo

$$\begin{aligned} A &= \frac{(-2 - 0)(1 - 4) - (-2 + 2)(1 + 2 \cdot 0)}{(1 + 2 \cdot (-2))^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}, \\ B &= \frac{4 \cdot 0 \cdot (1 + 2 \cdot 0)}{(1 + 2 \cdot (-2))^2} = 0, \\ C &= \frac{-4 \cdot (1 + 2 \cdot (-2)) + 4 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 0}{(1 + 2 \cdot (-2))^2} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}, \\ \Delta &= \frac{8}{9} > 0. \end{aligned}$$

Kako je $A > 0$, točka $(1, 0, -2)$ je lokalni minimum.

Na isti se način uvrštavanjem za točku $(-1, 0, 2)$ dobiva $A = -\frac{2}{3}$, $B = 0$, $C = -\frac{4}{3}$ te $\Delta = \frac{8}{9}$ što uz negativni A dovodi do zaključka da je točka $(-1, 0, 2)$ točka lokalnog maksimuma.

Zadatak 9.0.6. (Zadatak s kolokvija)

Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = e^{xy-3x}$.

Rješenje.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{xy-3x}(y - 3), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{xy-3x}x$$

Sustav za određivanje stacionarnih točki je

$$e^{xy-3x}(y-3) = 0,$$
$$e^{xy-3x}x = 0.$$

Kako je eksponencijalna funkcija strogo pozitivna za svaki x i y, odmah dobivamo da je $x = 0$ i $y = 3$. Druge parcijalne derivacije su

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^{xy-3x}(y-3)^2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = e^{xy-3x}(y-3)x + e^{xy-3x} = e^{xy-3x}(yx-3x+1),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = e^{xy-3x}x^2$$

pa dobivamo da je $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$ te $\Delta = -1$ te zaključujemo da je u $(0,3)$ sedlasta točka (funkcija nema lokalnih ekstrema).

Poglavlje 10

Višestruki integrali

Od višestrukih integrala radit ćemo dvostruke integrale. Princip integriranja je isti kao kod jednostrukih integrala, samo što moramo paziti na redoslijed integracije.
Simbolički zapis dvostrukog integrala je

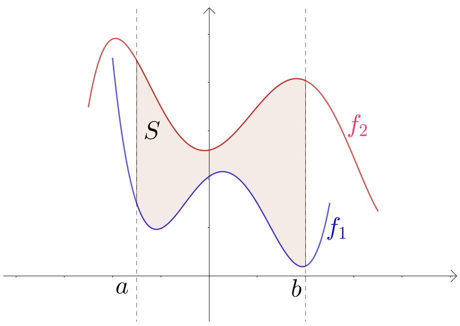
$$\iint\limits_S f(x, y)\, dx\, dy$$

pri čemu je S područje integracije, a $f(x, y)$ podintegralna funkcija.
Oznaka $dx\, dy$ se u simboličkom zapisu uvijek piše na taj način, no ne označava redoslijed integracije. Redoslijed integriranja kod dvostrukih integrala uvijek je od unutarnjeg integrala prema vanjskom integralu. Koristit ćemo dva zapisa za svaki od redoslijeda integriranja:

1. prvo integriramo po y zatim po x

$$\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx \qquad \text{ili} \qquad \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

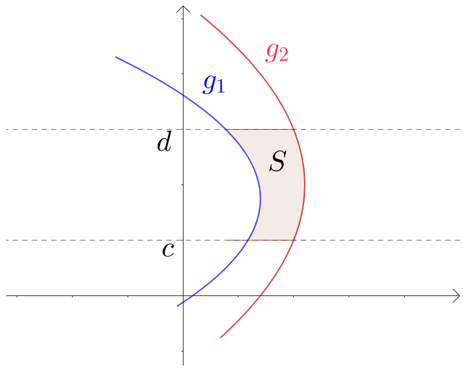
   Ako je vanjski integral po x, onda granice unutarnjeg integrala moraju biti izražene u varijabli x (tj. kao funkcije $f_1(x)$ i $f_2(x)$). Granice unutarnjeg integrala ne smiju sadržavati y.



2. prvo integriramo po varijabli x zatim po y

$$\int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{ili} \qquad \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

Ako je vanjski integral po y, onda granice unutarnjeg integrala moraju biti izražene u varijabli y (tj. kao funkcije $g_1(y)$ i $g_2(y)$). Granice unutarnjeg integrala ne smiju sadržavati x.



Zadatak 10.0.1. Integrirajte $\displaystyle\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2+2y)\,dx$.

Rješenje.

$$\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2+2y)\,dx = \int_0^2 \left[\int_0^1 x^2\,dx + 2y\int_0^1 1\,dx\right] dy = \int_0^2 \left(\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 + 2y\cdot x\Bigg|_0^1\right) dy =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{1}{3}+2y\right) dy = \left(\frac{1}{3}y+y^2\right)\Bigg|_0^2 = \frac{14}{3}$$

Zadatak 10.0.2. Integrirajte $\displaystyle\int_{-3}^3 dy \int_{y^2-4}^5 (x+2y)\,dx$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{3} dy \int_{y^2-4}^{5} (x+2y)\,dx &= \int_{-3}^{3} \left(\frac{x^2}{2}+2yx\right)\Bigg|_{y^2-4}^{5} dy = \\
&= \int_{-3}^{3} \left[\left(\frac{25}{2}+10y\right) - \left(\frac{1}{2}(y^2-4)^2 + 2y(y^2-4)\right)\right] dy = \\
&= \int_{-3}^{3} \left(-\frac{1}{2}y^4 - 2y^3 + 4y^2 + 18y + \frac{9}{2}\right) dy = \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-3}^{3} y^4\,dy - 2\int_{-3}^{3} y^3\,dy + 4\int_{-3}^{3} y^2\,dy + \\
&+ 18\int_{-3}^{3} y\,dy + \frac{9}{2}\int_{-3}^{3} 1\,dy = \\
&\overset{(*)}{=} -\frac{1}{2}\cdot 2\int_{0}^{3} y^4\,dy - 2\cdot 0 + 4\cdot 2\int_{0}^{3} y^2\,dy + 18\cdot 0 + \frac{9}{2}\cdot 2\int_{0}^{3} 1\,dy = \\
&= -\frac{y^5}{5}\Bigg|_{0}^{3} + 8\cdot\frac{y^3}{3}\Bigg|_{0}^{3} + 9y\Bigg|_{0}^{3} = -\frac{243}{5} + 72 + 27 = \frac{252}{5}
\end{aligned}$$

U jednakosti (*) korištena je Napomena 3.3.3 o integriranju neparne, odnosno parne funkcije na simetričnom intervalu.

Zadatak 10.0.3. Integrirajte $\int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{\sin\varphi}^{1} r\,dr$.

Rješenje.

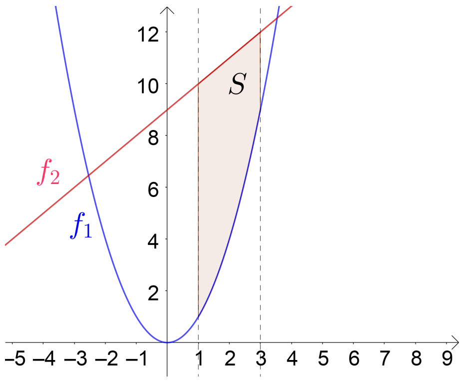
$$\begin{aligned}
\int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{\sin\varphi}^{1} r\,dr &= \int_{0}^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Bigg|_{\sin\varphi}^{1} d\varphi = \int_{0}^{2\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sin^2\varphi}{2}\right) d\varphi = \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} 1\,d\varphi - \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\varphi\Bigg|_{0}^{2\pi} - \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi = \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2\pi - \frac{1}{4}\int_{0}^{2\pi} (1-\cos 2\varphi)\,d\varphi = \pi - \frac{1}{4}\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin(2\varphi)\right)\Bigg|_{0}^{2\pi} = \\
&= \pi - \frac{1}{4}\left(2\pi - \frac{1}{2}\sin(4\pi) - 0 + \frac{1}{2}\sin 0\right) = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Zadatak 10.0.4. Skicirajte područje integracije S u integralu:

a) $\int_{1}^{3} dx \int_{x^2}^{x+9} f(x,y)\,dy$, b) $\int_{0}^{4} dy \int_{y}^{10-y} f(x,y)\,dx$.

Rješenje.

a) Područje S se po varijabli x proteže od $x = 1$ do $x = 3$, a po varijabli y od funkcije $f_1(x) = x^2$ i $f_2(x) = x + 9$.

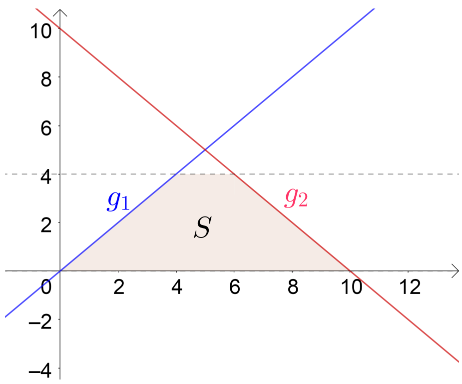


Slika 10.1: Područje S

b) Područje S se po varijabli y proteže od $y = 0$ do $y = 4$, a po varijabli x od $g_1(y) = y$ do $g_2(y) = 10 - y$.

$g_1(y) = y \Rightarrow x = y \Rightarrow y = x$

$g_2(y) = 10 - y \Rightarrow x = 10 - y \Rightarrow y = 10 - x$



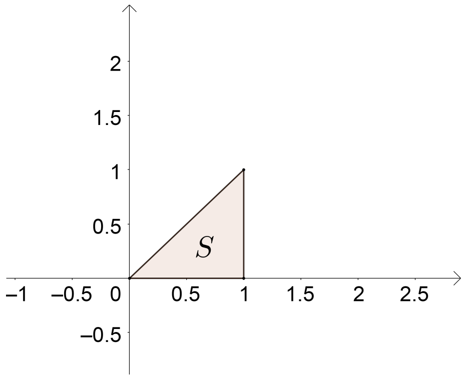
Slika 10.2: Područje S

Zadatak 10.0.5. Odredite granice integracije u oba poretka za $\iint\limits_S f(x,y)\,dx\,dy$ ako je:

a) S trokut s vrhovima $(0,0)$, $(1,0)$ i $(1,1)$,

b) S određen odsječkom parabole $y = x^2$ omeđen pravcem $y = 4$.

Rješenje.

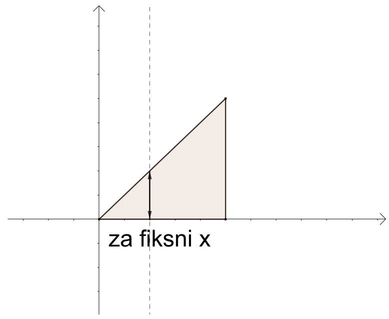


Slika 10.3: Područje S

a) Pravac koji prolazi kroz $(0,0)$ i $(1,1)$ ima jednadžbu $y = x$, onaj kroz $(0,0)$ i $(1,0)$ je $y = 0$ te onaj kroz $(1,0)$ i $(1,1)$ je $x = 1$.

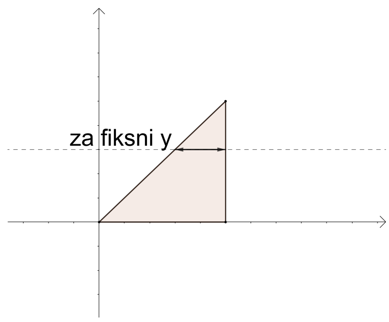
1. poredak: za fiksni $x \in [0,1]$ po y se krećemo od pravca $y = 0$ do $y = x$.

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)\,dy$$

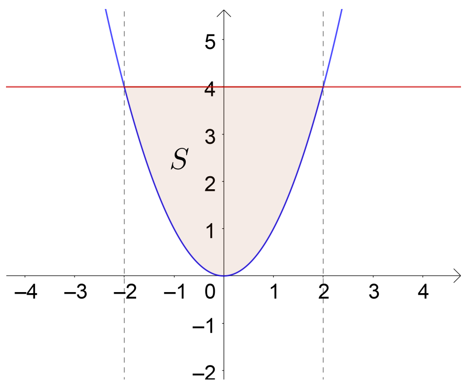


2. poredak: za fiksni $y \in [0,1]$ po x se krećemo od pravca $y = x$ do $x = 1$, no prvi pravac ne smijemo zapisati na taj način, već kao $x = y$.

$$\int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y)\,dx$$



b) Najprije skiciramo zadanu parabolu i pravac.



Slika 10.4: Područje S

Prvi poredak: po x se krećemo od -2 do 2, a za fiksni $x \in [-2,2]$ krećemo se od parabole $y = x^2$ do pravca $y = 4$.

$$\int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} f(x,y)\, dy$$

Drugi poredak: po y se krećemo od 0 do 4, a za fiksni $y \in [0,4]$, krećemo se od lijeve grane parabole $x = -\sqrt{y}$ do desne grane parabole $x = \sqrt{y}$.

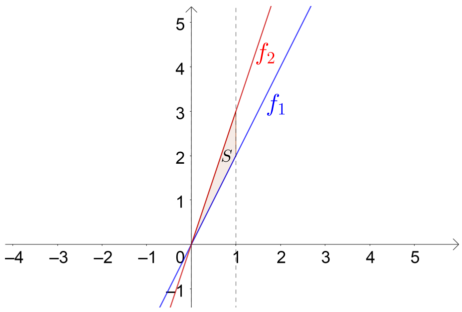
$$\int_{0}^{4} dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\, dx$$

Zadatak 10.0.6. Promijenite poredak integracije u integralu:

a) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x,y)\, dy$, b) (Zadatak s ispita) $\displaystyle\int_{-3}^{0} dx \int_{(x+2)^2+3}^{7+x} f(x,y)\, dy$.

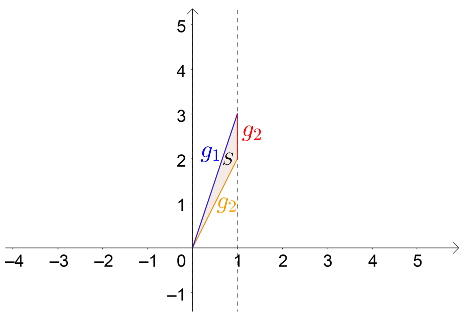
Rješenje.

a) Najprije skiciramo područje S koje se po x prostire od $x = 0$ do $x = 1$, a po y od $f_1(x) = 2x$ do $f_2(x) = 3x$.



Slika 10.5: Područje S

Prilikom zamjene redoslijeda integracije prvo odredimo granice za y: od 0 do 3. Na tom intervalu funkcije $g_1(y)$ i $g_2(y)$ nisu cijelo vrijeme iste. Preciznije, funkcija $g_1(y) = \frac{y}{3}$ je stalna, no za fiksni $y \in [0,2]$ funkcija $g_2(y)$ je pravac $g_2(y) = \frac{y}{2}$, a za $y \in [2,3]$, funkcija $g_2(y)$ je vertikalni pravac $g_2(y) = 1$.

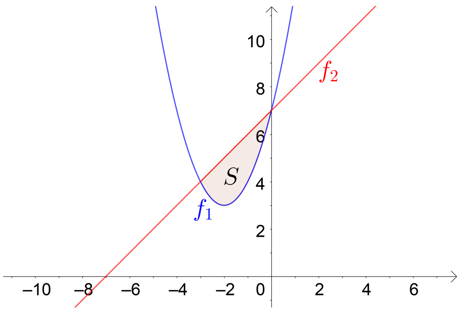


Slika 10.6: Područje S

Prema tome, u drugom redoslijedu integral ne možemo zapisati kao jedan dvostruki integral, već kao dva.

$$I = \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)\, dx + \int_2^3 dy \int_{\frac{y}{3}}^{1} f(x,y)\, dx$$

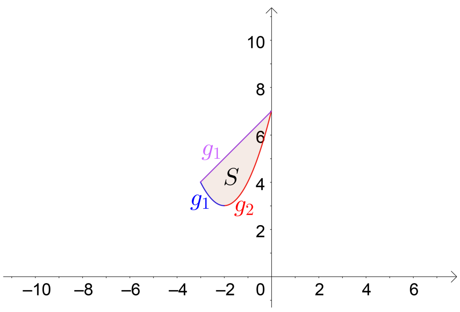
b) Najprije skiciramo područje S.



Slika 10.7: Područje S

Kao presječne točke funkcija f_1 i f_2 dobivaju se točke $(-3,4)$ i $(0,7)$. Po y S se pruža od $y=3$ do $y=7$. Funkcija $g_2(y) = -2+\sqrt{y-3}$ je ista za sve $y \in [3,7]$, no za $y \in [3,4]$ je $g_1(y) = -2-\sqrt{y-3}$, a za $y \in [4,7]$ je $g_1(y) = y-7$. Integral je

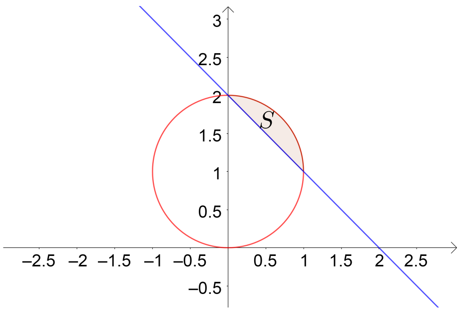
$$I = \int_3^4 dy \int_{-2-\sqrt{y-3}}^{-2+\sqrt{y-3}} f(x,y)\, dx + \int_4^7 dy \int_{y-7}^{-2+\sqrt{y-3}} f(x,y)\, dx.$$



Slika 10.8: Područje S

Zadatak 10.0.7. Izračunajte $\iint\limits_S f(x,y)\, dx\, dy$ ako je S manje područje omeđeno pravcem koji prolazi točkama $(0,2)$ i $(2,0)$ i lukom kružnice $x^2+(y-1)^2=1$ za $f(x,y)=x$.

Rješenje. Skiciramo S. Jednadžba pravca kroz $(0,2)$ i $(2,0)$ je $y=-x+2$.



Slika 10.9: Područje S

Presjek kružnice i pravca dobijemo rješavanjem

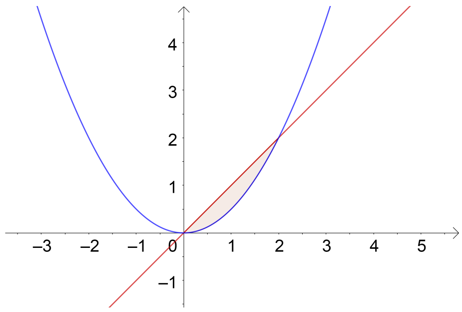
$$x^2 + (-x + 2 - 1)^2 = 1$$
$$2x^2 - 2x = 0$$
$$2x(x - 1) = 0$$
$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 1$$
$$y_1 = 2 \qquad y_2 = 1$$

Zapisujemo integral, npr. u poretku po x pa po y. Područje S proteže se po x od $x = 0$ do $x = 1$, a po y od pravca $f_1(x) = -x + 2$ do gornje polukružnice $f_2(x) = 1 + \sqrt{1 - x^2}$ $(x^2 + (y - 1)^2 = 1 \Rightarrow (y - 1)^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y = 1 \pm \sqrt{1 - x^2})$.

$$I = \int_0^1 dx \int_{-x+2}^{1+\sqrt{1-x^2}} x\,dy = \int_0^1 xy \Big|_{-x+2}^{1+\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 (-x + x^2 + x\sqrt{1-x^2})\,dx =$$
$$= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 + \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} t = 1 - x^2 & x_1 = 0 \to t_1 = 1 \\ dt = -2x\,dx & x_2 = 1 \to t_2 = 0 \\ x\,dx = -\frac{1}{2}\,dt & \end{bmatrix} =$$
$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\int_1^0 \sqrt{t}\,dt = -\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^0 = \frac{1}{6}$$

Zadatak 10.0.8. Izračunajte $\iint\limits_S \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ ako je S područje omeđeno parabolom $y = \frac{x^2}{2}$ i pravcem $y = x$.

Rješenje. Najprije skiciramo S.



Slika 10.10: Područje S

Presjek pravca i parabole dobivamo na sljedeći način.

$$\frac{x^2}{2} = x$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

$$y_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

Postavljamo integral, npr. najprije po x zatim po y. Po x se područje S proteže od 0 do 2, a po y od parabole $f_1(x) = \frac{x^2}{2}$ do pravca $f_2(x) = x$.

$$I = \int_0^2 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{x} \frac{x}{x^2+y^2}\, dy = \int_0^2 x \int_{\frac{x^2}{2}}^{x} \frac{1}{x^2+y^2}\, dy\, dx = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \Bigg|_{\frac{x^2}{2}}^{x} dx =$$

$$= \int_0^2 \left(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{x}{2}\right) dx = \int_0^2 \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{x}{2}\right) dx = \frac{\pi}{4} \int_0^2 1\, dx - \int_0^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{2}\, dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg} \frac{x}{2} & dv = dx \\ du = \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} \cdot \frac{1}{2}\, dx & v = x \\ du = \frac{2}{4+x^2}\, dx & \end{bmatrix} = \frac{\pi}{4} x \Bigg|_0^2 - \left[x \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \Bigg|_0^2 - \int_0^2 \frac{2x}{4+x^2}\, dx \right] =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left[2 \operatorname{arctg} 1 - 0 \operatorname{arctg} 0 - \int_0^2 \frac{2x}{4+x^2}\, dx \right] = \begin{bmatrix} t = 4 + x^2 & x_1 = 0 \to t_1 = 4 \\ dt = 2x\, dx & x_2 = 2 \to t_2 = 8 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \int_4^8 \frac{1}{t}\, dt \right) = \ln |t| \Bigg|_4^8 = \ln 2$$

10.1 Dvostruki integrali - polarne koordinate

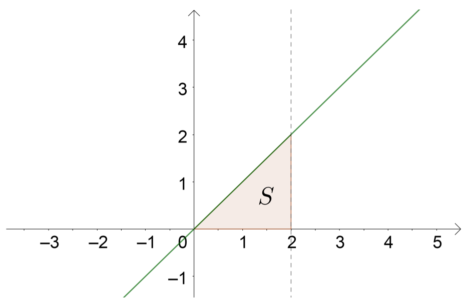
Sjetimo se polarnih koordinata kod jednostrukih integrala u računanju površina likova (Lekcija 5). Formula koju smo tamo koristili za računanje površina izvedena je pomoću dvostrukih integrala.
Ovdje nas zanima kako transformirati dvostruki integral zapisan u Kartezijevim koordinatama u dvostruki integral u polarnim koordinatama.
Poveznica tih dviju vrsta koordinata je $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. Simbolički zapisana formula je

$$\iint\limits_S f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_S f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi) r\,dr\,d\varphi$$

pri čemu je S u prvom integralu opisan pomoću Kartezijevih koordinata, a u drugom integralu pomoću polarnih koordinata. Integral na desnoj strani ima dodatno i r koji predstavlja Jacobijan zamjene koordinati.

Zadatak 10.1.1. Transformirajte $\displaystyle\int_0^2 dx \int_0^x f(x,y)\,dy$ u integral s polarnim koordinatama.

Rješenje. Skiciramo područje S.



Slika 10.11: Područje S

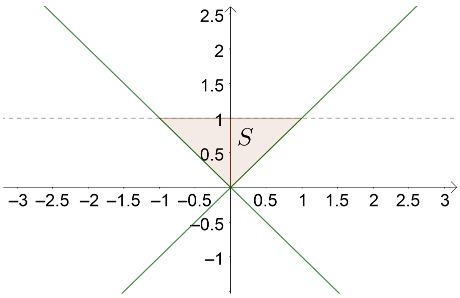
Sjetimo se, kod polarnih koordinata r označava udaljenost točke od ishodišta, a kut φ je kut između spojnice te točke i pozitivnog dijela osi x.
Najudaljenije točke područja S leže na pravcu $x = 2$. Kako je u polarnim koordinatama $x = r\cos\varphi$, slijedi da je $r = \frac{2}{\cos\varphi}$.
Kut φ je između 0 i $\frac{\pi}{4}$ jer je koeficijent smjera pravca $y = x$ jednak 1, a kut koji pravac zatvara s pozitivnim dijelom osi x i koeficijent smjera tog pravca povezani su na način da je $\operatorname{tg}\varphi = k$. Budući da je ishodište dio područja S, najmanji r je 0.

S u polarnim koordinatam uvijek opisujemo najprije po φ, a onda po r, tj. integral je

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, dr.$$

Zadatak 10.1.2. Transformirajte $\iint\limits_S f(x^2+y^2)\, dx\, dy$ ako je S područje omeđeno pravcima $y = x$, $y = -x$ i $y = 1$.

Rješenje. Skiciramo S.



Slika 10.12: Područje S

Kao i u prethodnom zadatku, na temelju koeficijenta smjera pravaca dobivamo da je $\varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Budući da je ishodište dio područja S, najmanji r je 0. Najudaljenije točke od ishodišta su one na pravcu $y = 1$. U polarnim koordinatama je $y = r\sin\varphi$ pa je $r = \frac{1}{\sin\varphi}$.

U argumentu funkcije javlja se $x^2 + y^2 = (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = r^2$.

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} f(r^2) r\, dr$$

Zadatak 10.1.3. Prelaskom na polarne koordinate izračunajte $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$ ako je S područje omeđeno kružnicom $x^2 + y^2 = 2x$.

Rješenje. Najprije napišemo jednadžbu kružnice u standardnom obliku.

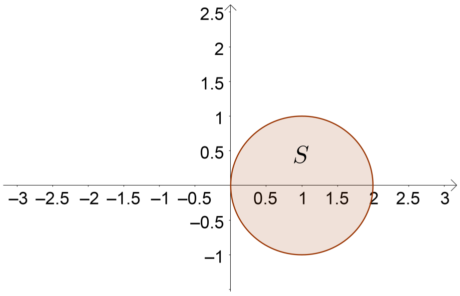
$$x^2 + y^2 = 2x$$

$$x^2 - 2x + y^2 = 0$$

$$(x^2 - 2x + 1) - 1 + y^2 = 0$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

$$S(1,0),\ r = 1$$



Slika 10.13: Područje S

Spojnica točaka koje su u S s pozitivnim dijelom osi x zatvara kut od $-\frac{\pi}{2}$ do $\frac{\pi}{2}$. Najbliža točka ishodišta koja je i u S je samo ishodište pa je najmanji r jednak 0. Najudaljenije točke iz S su točke s ruba kruga, tj. točke na kružnici. Uvrštavanjem polarnih koordinata u jednadžbu kružnice dobivamo gornju granicu integrala za r.

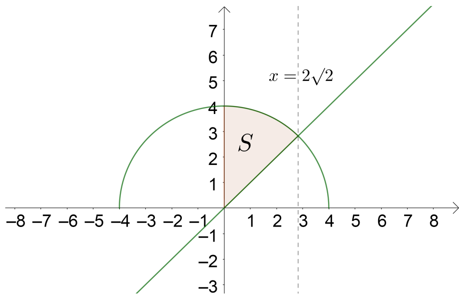
$$(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = 2r\cos\varphi$$
$$r^2 = 2r\cos\varphi$$
$$r = 2\cos\varphi$$

Podintegralna funkcija je $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = r$.

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r\cdot r\,dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3}\Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{3}\cdot 8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\,d\varphi = \\
&= \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi(1-\sin^2\varphi)\,d\varphi = \\
&= \begin{bmatrix} t = \sin\varphi & \varphi_1 = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow t_1 = \sin -\frac{\pi}{2} = -1 \\ dt = \cos\varphi\,d\varphi & \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{8}{3}\int_{-1}^{1}(1-t^2)\,dt = \frac{8}{3}\left(t - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{32}{9}
\end{aligned}$$

Zadatak 10.1.4. Prelaskom na polarne koordinate izračunajte $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{2}} dx \int_x^{\sqrt{16-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy$.

Rješenje. Skiciramo S. Gornja granica drugog integrala je $y = \sqrt{16-x^2}$ što predstavlja gornju polukružnicu kružnice $x^2+y^2=16$.



Slika 10.14: Područje S

Kut φ kreće se od $\frac{\pi}{4}$ do $\frac{\pi}{2}$. Ishodište je dio područja S pa je najmanji r, $r = 0$. Najudaljenije točke područja S su na kružnici.

$$(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = 16$$
$$r^2 = 16$$
$$r = 4$$

Podintegralna funkcija je $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2} = r$.

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^4 r \cdot r\,dr = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3}\,dr = \frac{64}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{16\pi}{3}$$

10.2 Dvostruki integrali - površina

Pomoću dvostrukih integrala površina područja S računa se tako da se za podintegralnu funkciju $f(x,y)$ uvrsti $f(x,y) = 1$.

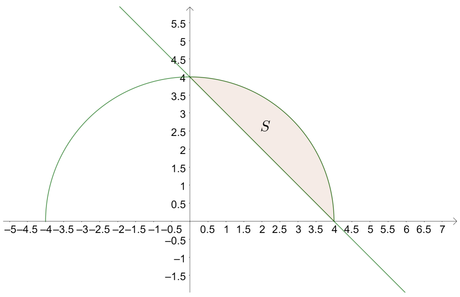
$$P(S) = \iint\limits_S dx\,dy$$

Kada S opišemo sukladno skici (odredimo granice dvostrukog integrala), lagano dolazimo do formule za površinu liku koju znamo iz Lekcije 5, $P = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx$.
U polarnim koordinatama formula za površinu S je

$$P(S) = \iint\limits_S r\,dr\,d\varphi.$$

Zadatak 10.2.1. Skicirajte površinu zadanu s $\int_0^4 dy \int_{4-y}^{\sqrt{16-y^2}} dx$. Transformirajte zadani integral u polarne koordinate.

Rješenje. Skiciramo S. Po y od 0 do 4, a po x od $x = 4 - y$, što je pravac $y = 4 - x$, do $x = \sqrt{16 - y^2}$ što je desna polukružnica kružnice $x^2 + y^2 = 16$.



Slika 10.15: Područje S

Kut φ ide od 0 do $\frac{\pi}{2}$.

Najbliže točke ishodištu, a da su u S, leže na pravcu $y = 4 - x$. Uvrstimo li polarne koordinate, imamo

$$r \sin\varphi = 4 - r\cos\varphi$$

$$r(\sin\varphi + \cos\varphi) = 4$$

$$r = \frac{4}{\sin\varphi + \cos\varphi}.$$

Najudaljenije točke ishodištu, a da su u S, leže na kružnici $x^2 + y^2 = 16$. Uvrstimo li polarne koordinate, imamo

$$(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = 16$$

$$r^2 = 16$$

$$r = 4.$$

Integral kojim dobivamo površinu je

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{4}{\sin\varphi + \cos\varphi}}^{4} r\,dr.$$

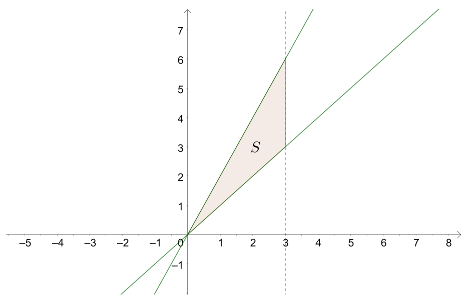
Zadatak 10.2.2. Skicirajte i izračunajte površinu danu s $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int_0^{\frac{3}{\cos\varphi}} r\,dr$. Tranformirajte u Kartezijeve koordinate.

Rješenje. Odredimo kojim pravcima odgovaraju kutevi $\frac{\pi}{2}$ i $\operatorname{arctg} 2$.

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow y = x$

$\operatorname{tg}\operatorname{arctg} 2 = 2 \Rightarrow y = 2x$

Najveći r je $r = \frac{3}{\cos\varphi}$ što daje $r\cos\varphi = 3$ što prepoznajemo kao $x = 3$.



Slika 10.16: Područje S

Integral u Kartezijevim koordinatama je

$$P(S) = \int_0^3 dx \int_x^{2x} 1\,dy = \int_0^3 y\Big|_x^{2x} dx = \int_0^3 x\,dx = \frac{9}{2}.$$

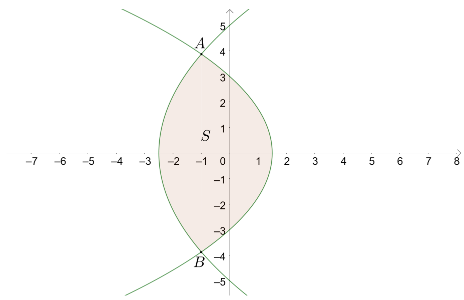
Primijetimo da je integral izražen u novim koordinatama lakši za računanje nego zadani integral.

Zadatak 10.2.3. Odredite površinu lika omeđenog s $y^2 = 10x + 25$ i $y^2 = -6x + 9$.

Rješenje. Presječne točke zadanih parabola dobivamo

$$10x + 25 = -6x + 9$$
$$16x = -16$$
$$x = -1 \Rightarrow y^2 = 10 \cdot (-1) + 25 = 15 \Rightarrow y_{1,2} = \pm\sqrt{15}.$$

To su točke $A(-1, \sqrt{15})$ i $B(-1, -\sqrt{15})$.



Slika 10.17: Područje S

Zapisujemo dvostruki integral s podintegralnom funkcijom $f(x, y) = 1$ jer tražimo površinu lika. Primijetimo da ako prvo opisujemo S po x, a zatim po y, da se mijenjaju funkcije $f_1(x)$ i $f_2(x)$ (do -1 to su grane parabole $y^2 = 10x + 25$, a nakon -1 to su grane parabole $y^2 = -6x + 9$). Zato je bolje integral postaviti najprije po y zatim po x.

$y^2 = 10x + 25 \Rightarrow x = \frac{1}{10}(y^2 - 25) \Rightarrow g_1(y) = \frac{1}{10}(y^2 - 25)$

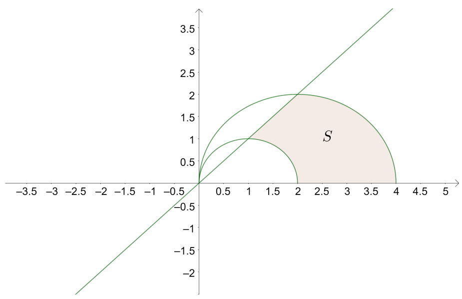
$y^2 = -6x + 9 \Rightarrow x = \frac{1}{6}(-y^2 + 9) \Rightarrow g_2(y) = \frac{1}{6}(-y^2 + 9)$

$$P(S) = \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} dy \int_{\frac{1}{10}(y^2-15)}^{\frac{1}{6}(-y^2+9)} 1\,dx = \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} x \Big|_{\frac{1}{10}(y^2-25)}^{\frac{1}{6}(-y^2+9)} dy = \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} \left(-\frac{4}{15}y^2 + 4\right) dy =$$

$$= \left(-\frac{4}{45}y^3 + 4y\right) \Big|_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} = \frac{16}{3}\sqrt{15}$$

Zadatak 10.2.4. Prelaskom na polarne koordinate izračunajte površinu lika omeđenog s $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$ i $y = 0$.

Rješenje. Jednakost $x^2 + y^2 = 2x$ predstavlja kružnicu $(x-1)^2 + y^2 = 1$, a $x^2 + y^2 = 4x$ kružnicu $(x-2)^2 + y^2 = 4$.



Slika 10.18: Područje S

Lik nam je lakše opisati u polarnim koordinatama. Kut φ kreće se od 0 do $\frac{\pi}{4}$. Točke lika najbliže ishodištu su one na manjoj kružnici

$$x^2 + y^2 = 2x$$
$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 2r\cos\varphi$$
$$r^2 = 2r\cos\varphi$$
$$r = 2\cos\varphi.$$

Točke lika najudaljenije od ishodišta su one na većoj kružnici

$$x^2 + y^2 = 4x$$
$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 4r\cos\varphi$$
$$r^2 = 4r\cos\varphi$$
$$r = 4\cos\varphi.$$

$$P(S) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} 1 \cdot r\,dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}r^2 \Bigg|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{2}12 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\varphi\,d\varphi =$$

$$= 6\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(2\varphi)}{2}\,d\varphi = 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos(2\varphi))\,d\varphi = 3\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin(2\varphi)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2}$$

10.3 Dvostruki integrali - volumen

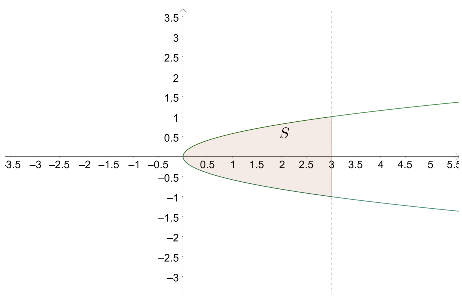
Pomoću dvostrukih integrala možemo izračunati i volumene tijela koja su odozgo omeđena grafom funkcije $f(x, y)$. Formula je sljedeća:

$$V = \iint\limits_S f(x,y)\,dx\,dy$$

pri čemu je S projekcija dijela grafa funkcije f na xy-ravninu. Lik S nalazi se u xy-ravnini ($z = 0$) pa njega najčešće dobivamo uvrštavanjem 0 na mjestu z u jednadžbama ploha koje se javljaju u zadatku. Podintegralna funkcija je $f(x, y) = z$.

Zadatak 10.3.1. (Zadatak s ispita)
Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $x = 3$, $x = 3y^2$, $z = 0$ i $z = 5$.

Rješenje. Jednadžbom $z = 0$ dana je xy-ravnina. Ploha koja odozgo omeđuje tijelo dana je s $z = 5$ pa je $f(x, y) = 5$. Lik S određuju $x = 3$ i $y^2 = \frac{1}{3}x$.



Slika 10.19: Područje S

$$V = \int_{-1}^{1} dy \int_{3y^2}^{3} 5\,dx = \int_{-1}^{1} 5x \Bigg|_{3y^2}^{3} dy = \int_{-1}^{1} (15 - 15y^2)\,dx = (15y - 5y^3)\Bigg|_{-1}^{1} = 20$$

Zadatak možemo postaviti još na dva načina:

$$V = \int_0^3 dx \int_{-\sqrt{\frac{1}{3}x}}^{\sqrt{\frac{1}{3}x}} 5\,dy$$

ili koristeći simetriju lika S s obzirom na os x

$$V = 2\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{\frac{1}{3}x}} 5\,dy.$$

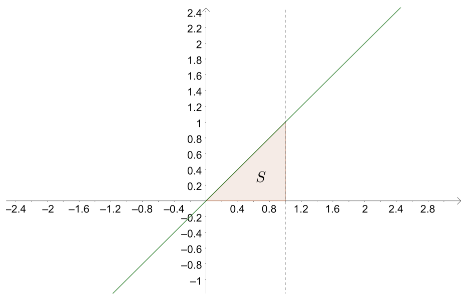
Zadatak 10.3.2. Izračunajte volumen tijela omeđenog s $x^2 + z^2 = 1$ i $y = x$ te uz uvjete $x \geq 0$, $z \geq 0$ i $y \geq 0$.

Rješenje. $z = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$

Biramo $x = 1$ jer je uvjet da $x \geq 0$. Lik S određen je pravcem $x = 1$, $y = x$ i koordinatnim osima. Podintegralnu funkciju dobivamo iz jednakosti u kojoj se javlja z.

$x^2 + z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm\sqrt{1 - x^2}$

Biramo $z = \sqrt{1 - x^2}$ jer je uvjet $z \geq 0$ pa je $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2}$.



Slika 10.20: Područje S

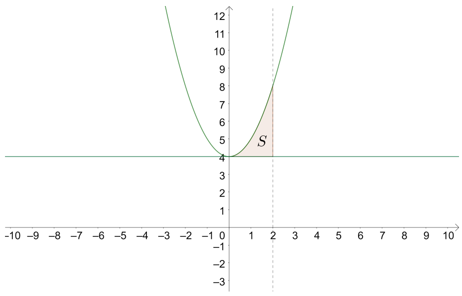
$$V = \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{1 - x^2}\,dy = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}y \bigg|_0^x = \int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\,dx =$$

$$= \begin{bmatrix} t = 1 - x^2 & x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1 \\ dt = -2x\,dx & x_2 = 1 \Rightarrow t_2 = 0 \\ x\,dx = -\frac{1}{2}\,dt & \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\int_1^0 t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{3}$$

Zadatak 10.3.3. Izračunajte volumen tijela omeđenog s $x = 2$, $y = 4$, $z = 0$, $y = x^2 + 4$ i $z = x^2$.

Rješenje. Jednakost $z = 0$ predstavlja xy-ravninu.

Lik S određen je s $x = 2$, $y = 4$, $y = x^2 + 4$, a $f(x, y) = x^2$.



Slika 10.21: Područje S

$$V = \int_0^2 dx \int_4^{x^2+4} x^2\,dy = \int_0^2 x^2 y \Big|_4^{x^2+4} dx = \int_0^2 x^4\,dx = \frac{32}{5}$$

Poglavlje 12

Obične diferencijalne jednadžbe 1. reda

Diferencijalne jednadžbe su oblika $f(x, y, y', y'', \dots) = 0$, tj. funkcija f ovisi o varijabli x i funkciji $y(x)$ te njezinim derivacijama.
Red diferencijalne jednadžbe je red najveće derivacije od $y(x)$ koja se u njoj pojavljuje.

Primjer 12.0.1. $y'''(x) + \frac{x}{\ln y(x)} = 0 \rightarrow$ red 3

Rješenje diferencijalne jednadžbe je funkcija $y(x)$, odnosno skup funkcija (ukoliko nisu zadani početni uvjeti).
Kod zapisa diferencijalnih jednadžbi radi preglednosti izostavljamo pisati ovisnost y o x, no ta ovisnost vrijedi.

Primjer 12.0.2. a) Provjerite je li $y = 5x^2$ rješenje diferencijalne jednadžbe $xy' = 2y$.
$y = 5x^2$ i $y' = 10x$ uvrstimo u $xy' = 2y$ te dobivamo da je $10x^2 = 10x^2$.

b) Provjerite je li $y = e^x$ rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = y$. Je li i $y = Ce^x$ rješenje?
$y = e^x$ pa je $y' = e^x$ te iz diferencijalne jednadžbe slijedi da je $e^x = e^x$. Na isti način dobivamo da je i $y = Ce^x$ rješenje.

12.1 Separacija varijabli

Separacija varijabli je jedna od metoda kojom rješavamo diferencijalne jednadžbe. Nju koristimo kada jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$y' = f(x)g(y),$$

odnosno kad je desnu stranu moguće separirati na dio koji ovisi samo o x i dio koji ovisi samo o y.

Postupak rješavanja je:

1. zapišemo y' kao $\dfrac{dy}{dx}$,
2. množenjem cijele jednadžbe dovedemo sve što ovisi o y i dy na lijevu stranu, a sve što ovisi o x i dx na desnu stranu,
3. integriramo.

Zadatak 12.1.1. Riješite diferencijalnu jednadžbu $xyy' = 1 - x^2$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
xyy' &= 1 - x^2 \\
xy\frac{dy}{dx} &= 1 - x^2 \quad / \cdot \frac{1}{x} \quad / \cdot dx \\
y\,dy &= \frac{1-x^2}{x}\,dx \\
\int y\,dy &= \int \frac{1-x^2}{x}\,dx \\
\int y\,dy &= \int \left(\frac{1}{x} - x\right)\,dx \\
\frac{y^2}{2} + C_1 &= \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C_2 \quad / \cdot 2 \\
y^2 + 2C_1 &= 2\ln|x| - x^2 + 2C_2 \\
y^2 &= 2\ln|x| - x^2 + C,\; C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Budući da sve konstante možemo "okrupniti" u jednu, dovoljno je kod integriranja pisati konstantu samo na desnoj strani.

Zadatak 12.1.2. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y' = -\dfrac{y}{x}$.

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
y' &= -\frac{y}{x} \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x} \quad / \cdot \frac{1}{y} \quad / \cdot dx \\
\frac{1}{y}\,dy &= -\frac{1}{x}\,dx \\
\int \frac{1}{y}\,dy &= -\int \frac{1}{x}\,dx \\
\ln|y| &= -\ln|x| + C \\
\ln|y| &= \ln C - \ln|x| \\
\ln|y| &= \ln\frac{C}{|x|} \\
|y| &= \frac{C}{|x|} \\
y &= \frac{C}{x}
\end{aligned}
$$

Zadatak 12.1.3. Riješite diferencijalnu jednadžbu $\operatorname{tg} x\,dy - y\,dx = 0$.

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg} x\,dy &= y\,dx \quad / \cdot \frac{1}{y} \quad / \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} \\
\frac{1}{y}\,dy &= \frac{1}{\operatorname{tg} x}\,dx \\
\int \frac{1}{y}\,dy &= \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx \\
\ln|y| &= \ln|\sin x| + C \\
\ln|y| &= \ln|\sin x| + \ln C \\
\ln|y| &= \ln C|\sin x| \\
|y| &= C|\sin x| \\
y &= C\sin x
\end{aligned}
$$

Pomoćni račun

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx &= \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{bmatrix} = \\
&= \int \frac{1}{t}\,dt = \\
&= \ln|t| + C = \\
&= \ln|\sin x| + C
\end{aligned}
$$

Diferencijalna jednadžba koja je zadana bez početnog uvjeta (kao ove koje smo dosad riješili) ima tzv. opće rješenje koje odgovara skupu funkcija (zapis s C).

Diferencijalna jednadžba koja je zadana s početnim uvjetom/uvjetima ima tzv. partikularno rješenje (nema C u zapisu jer dobijemo konkretan C za koji vrijedi uvjet/uvjeti).

Zadatak 12.1.4. Nađite partikularno rješenje koje zadovoljava $(1+e^x)yy' = e^x$, $y(0) = 1$.

Rješenje. Najprije moramo dobiti opće rješenje.

$$
\begin{aligned}
(1+e^x)yy' &= e^x \\
(1+e^x)y\frac{dy}{dx} &= e^x \quad / \cdot \frac{1}{1+e^x} \quad / \cdot dx \\
y\,dy &= \frac{e^x}{1+e^x}\,dx \\
\int y\,dy &= \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx \\
\frac{y^2}{2} &= \ln(1+e^x)+C \\
y^2 &= 2\ln(1+e^x)+C
\end{aligned}
$$

Pomoćni račun

$$
\begin{aligned}
\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx &= \begin{bmatrix} t = 1+e^x \\ dt = e^x\,dx \end{bmatrix} = \\
&= \int \frac{1}{t}\,dt = \\
&= \ln|t| + C = \\
&= \ln(1+e^x)+C
\end{aligned}
$$

Kako bismo odredili konstantu C uvrštavamo $x=0$, $y=1$.

$$
\begin{aligned}
1 &= 2\ln(1+e^0)+C \\
C &= 1-2\ln 2
\end{aligned}
$$

Partikularno rješenje je ono za koje vrijedi $y^2 = 2\ln(1+e^x)+1-2\ln 2$.

U ovom poglavlju obradit ćemo i neke kompliciranije diferencijalne jednadžbe koje se rješavaju metodom separacije varijabli, no njoj prethodi jedna supstitucija. Jednadžbe oblika $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ supstitucijom $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux$ svodimo na novu diferencijalnu jednadžbu koju rješavamo metodom separacije. Pritom u također ovisi o x, tj. $y(x) = u(x)x$. Zato je derivacija $y'(x) = u'(x)\cdot x + u(x)\cdot 1$, tj. $y' = u'x + u$.

Zadatak 12.1.5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y' = \frac{y}{x} - 1$.

Rješenje. Ovaj izraz ne možemo separirati. Radimo supstituciju $u = \frac{y}{x}$ iz koje slijedi da je $y' = u'x + u$.

$$
\begin{aligned}
u'x + u &= u - 1 \\
u'x &= -1 \\
\frac{du}{dx}x &= -1 \quad / \cdot \frac{1}{x} \quad / \cdot dx \\
du &= -\frac{1}{x}\,dx \\
\int du &= -\int \frac{1}{x}\,dx \\
u &= -\ln|x| + C \\
u &= \ln C - \ln|x| \\
u &= \ln \frac{C}{|x|} \\
u &= \ln \frac{C}{x} \\
\frac{y}{x} &= \ln \frac{C}{x} \\
y &= x \ln \frac{C}{x}
\end{aligned}
$$

Zadatak 12.1.6. Odredite partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $(x^2 + y^2)\,dx = 2xy\,dy$, $y(4) = 0$.

Rješenje. Vidimo da diferencijalnu jednadžbu ne možemo separirati. Probamo transformirati jednadžbu da postane prikladna za gore navedenu supstituciju.

$$
\begin{aligned}
2xy\,dy &= \left(x^2 + y^2\right)\,dx \quad / \cdot \frac{1}{dx} \\
2xy\,\frac{dy}{dx} &= \left(x^2 + y^2\right) \\
2xy\,y' &= x^2 + y^2
\end{aligned}
$$

Kako dobiti izraz koji sadrži $\frac{y}{x}$?

$$
\begin{aligned}
2xyy' &= x^2 + y^2 \quad / \cdot \frac{1}{x^2} \\
\frac{2xyy'}{x^2} &= \frac{x^2 + y^2}{x^2} \\
\frac{2yy'}{x} &= 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2
\end{aligned}
$$

Uvodimo supstituciju: $u = \frac{y}{x}$ i $y' = u'x + u$.

$$\begin{aligned}
2u(u'x+u) &= 1+u^2\\
2uxu' + 2u^2 &= 1+u^2\\
2uxu' &= 1-u^2\\
2ux\frac{du}{dx} &= 1-u^2 \quad / \cdot \frac{1}{x} \quad / \cdot dx \quad / \cdot \frac{1}{1-u^2}\\
\frac{2u}{1-u^2}\,du &= \frac{1}{x}\,dx\\
-\ln|1-u^2| &= \ln|x| + \ln C\\
\ln\frac{1}{|1-u^2|} &= \ln\left(C|x|\right)\\
\frac{1}{|1-u^2|} &= C|x|\\
\frac{1}{\left|1-\frac{y^2}{x^2}\right|} &= C|x|\\
\frac{x^2}{|x^2-y^2|} &= C|x|
\end{aligned}$$

Pomoćni račun

$$\int \frac{2u}{1-u^2}\,du = \begin{bmatrix} t = 1-u^2 \\ dt = -2u\,du \\ 2u\,du = -dt \end{bmatrix} = \\
= \int \frac{-dt}{t} = \\
= -\ln|t| + C = \\
= -\ln|1-u^2| + C$$

Uvrstimo li početni uvjet $x = 4$, $y = 0$, dobivamo da je $C = \frac{1}{4}$, tj. partikularno rješenje je

$$|x^2 - y^2| = \frac{4x^2}{|x|}.$$

Zadatak 12.1.7. Riješite sljedeću diferencijalnu jednadžbu $y' = -\dfrac{x+y}{x}$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
y' &= -\left(\frac{x}{x} + \frac{y}{x}\right)\\
y' &= -1 - \frac{y}{x}
\end{aligned}$$

Uvodimo supstituciju $u = \dfrac{y}{x}$, $y' = u'x + u$.

$$
\begin{aligned}
u'x + u &= 1 - u \\
u'x &= -1 - 2u \\
\frac{du}{dx}x &= -(1+2u) \quad / \cdot \frac{1}{1+2u} \quad / \cdot \frac{1}{x} \quad / \cdot dx \\
\frac{1}{1+2u}\,du &= -\frac{1}{x}\,dx \\
\int \frac{1}{1+2u}\,du &= -\int \frac{1}{x}\,dx \\
\frac{1}{2}\ln|1+2u| &= -\ln|x| + \ln C \\
\ln|1+2u| &= -2\ln|x| + \ln C \\
\ln|1+2u| &= \ln\frac{C}{x^2} \\
|1+2u| &= \frac{C}{x^2}
\end{aligned}
$$

Pomoćni račun

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+2u}\,du &= \begin{bmatrix} t = 1+2u \\ dt = 2\,du \\ du = \frac{1}{2}\,dt \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \\
&= \frac{1}{2}\ln|t| + C = \\
&= \frac{1}{2}\ln|1+2u| + C
\end{aligned}
$$

Vratimo li suptituciju, imamo:

$$
\begin{aligned}
1 + 2\frac{y}{x} &= \frac{C}{x^2} \\
y &= \frac{1}{2}\left(\frac{C}{x} - x\right).
\end{aligned}
$$

12.2 Linearne diferencijalne jednadžbe 1. reda

Ova vrsta diferencijalnih jednadžbi sadržava najviše prvu derivaciju od y, a linearnost znači da je ovisnost o y i y' linearna.

Primjer 12.2.1. $2xy' + \sin xy = x^2 \cos x$ je linearna diferencijalna jednadžba.
$2y' + y^2 x = x^3 \ln x$ nije linearna diferencijalna jednadžba (zbog y^2).

Sve linearne diferencijalne jednadžbe možemo svesti na oblik

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

pri čemu su P i Q funkcije ovisne samo o varijabli x.

Postupak rješavanja ovakvih diferencijalnih jednadžbi naziva se metoda varijacije konstante, a provodi se u dva koraka:

1. metodom separacije riješimo homogenu diferencijalnu jednadžbu $y' + P(x)y = 0$,

2. na mjestu gdje se u rješenju prvog koraka javlja konstanta C napišemo da se zapravo radi o funkciji $C(x)$ te tako zapisano rješenje uvrštavamo u početnu diferencijalnu jednadžbu: $y' + P(x)y = Q(x)$. Iz te jednakosti dobijemo funkciju $C(x)$.

Zadatak 12.2.2. Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y' - \dfrac{y}{x} = x$.

Rješenje. Zadatak rješavamo u dva koraka.

1. homogena

$$\begin{aligned} y' - \frac{1}{x}y &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x}y \quad / \cdot \frac{1}{y} \quad / \cdot dx \\ \frac{1}{y}\,dy &= \frac{1}{x}\,dx \\ \int \frac{1}{y}\,dy &= \int \frac{1}{x}\,dx \\ \ln|y| &= \ln|x| + \ln C \\ \ln|y| &= \ln(C|x|) \\ y &= Cx \end{aligned}$$

2. varijacija konstante

$$\begin{aligned} y &= C(x)x \\ y' &= C'(x)x + C(x)\cdot 1 \end{aligned}$$

Uvrstimo u početnu diferencijalnu jednadžbu: $y' - \dfrac{1}{x}y = x$.

$$\begin{aligned} C'(x)x + C(x) - \frac{1}{x}C(x)x &= x \\ C'(x)x + C(x) - C(x) &= x \\ C'(x)x &= x \quad / : x \\ C'(x) &= 1 \\ C(x) &= \int 1\,dx = x + D,\ D \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Konačno rješenje: $y = (x + D)x,\ D \in \mathbb{R}$.

Zadatak 12.2.3. Odredite partikularno rješenje koje zadovoljava $xy' + y - e^x = 0$, $y(1) = 0$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} xy' + y - e^x &= 0 \quad / \cdot \frac{1}{x} \\ y' + \frac{1}{x}y &= \frac{e^x}{x} \end{aligned}$$

1. homogena

$$y' + \frac{1}{x}y = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}y \quad / \cdot \frac{1}{y} \quad / \cdot dx$$
$$\frac{1}{y}\,dy = -\frac{1}{x}\,dx$$
$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int -\frac{1}{x}\,dx$$
$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C$$
$$\ln|y| = \ln\frac{C}{|x|}$$
$$y = \frac{C}{x}$$

2. varijacija konstante

$$y = \frac{C(x)}{x}$$
$$y' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2}$$

Uvrstimo u početnu diferencijalnu jednadžbu: $xy' + y - e^x = 0$.

$$x \cdot \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x} - e^x = 0$$
$$\frac{C'(x)x}{x} - \frac{C(x)}{x} + \frac{C(x)}{x} - e^x = 0$$
$$C'(x) = e^x$$
$$C(x) = \int e^x\,dx = e^x + D$$

Opće rješenje je $y = \dfrac{e^x + D}{x}$, $D \in \mathbb{R}$.

Uvrstimo li uvjet $x = 1$, $y = 0$, dobivamo da je $D = -e$ pa je konačno rješenje $y = \dfrac{e^x - e}{x}$.

Zadatak 12.2.4. Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $\dfrac{dy}{dx} + 2\dfrac{y}{x} = x^3$.

Rješenje. Zadana jednadžba je jednaka jednadžbi

$$y' + \frac{2}{x}y = x^3.$$

1. homogena

$$y' + \frac{2}{x}y = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x} \quad / \cdot \frac{1}{y} \quad / \cdot dx$$
$$\frac{1}{y}\,dy = -\frac{2}{x}\,dx$$
$$\int \frac{1}{y}\,dy = -2\int \frac{1}{x}\,dx$$
$$\ln|y| = -2\ln|x| + \ln C$$
$$\ln|y| = \ln\frac{C}{x^2}$$
$$y = \frac{C}{x^2}$$

2. varijacija konstante

$$y = \frac{C(x)}{x^2}$$
$$y' = \frac{C'(x)x^2 - C(x) \cdot 2x}{x^4}$$

Uvrstimo to u početnu diferencijalnu jednadžbu: $y' + \dfrac{2}{x}y = x^3$.

$$\frac{C'(x)x^2 - 2xC(x)}{x^4} + 2\frac{2}{x} \cdot \frac{C(x)}{x^2} = x^3$$
$$\frac{C'(x)}{x^2} - \frac{2C(x)}{x^3} + \frac{2C(x)}{x^3} = x^3$$
$$C'(x) = x^5$$
$$C(x) = \int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + D,\ D \in \mathbb{R}$$

Konačno rješenje je $y = \dfrac{x^4}{6} + \dfrac{D}{x^2}$.

Zadatak 12.2.5. Odredite partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $y' - y\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$, $y(0) = 0$.

Rješenje. 1. homogena

$$\begin{aligned} y' - y\operatorname{tg} x &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= y\operatorname{tg} x \quad / \cdot \frac{1}{y} \quad / \cdot dx \\ \frac{1}{y}\,dy &= \operatorname{tg} x\,dx \\ \int \frac{1}{y}\,dy &= \int \operatorname{tg} x\,dx \\ \ln|y| &= -\ln|\cos x| + \ln C \\ \ln|y| &= \ln\frac{C}{|\cos x|} \\ y &= \frac{C}{\cos x} \end{aligned}$$

2. varijacija konstante

$$y = \frac{C(x)}{\cos x}$$

$$y' = \frac{C'(x)\cos x - C(x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

Uvrstimo to u početnu diferencijalnu jednadžbu: $y' - y\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$.

$$\frac{C'(x)\cos x}{\cos^2 x} + \frac{C(x)\sin x}{\cos^2 x} - \frac{C(x)}{\cos x}\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$$
$$\frac{C'(x)}{\cos x} + \frac{C(x)\sin x}{\cos^2 x} - \frac{C(x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}$$
$$C'(x) = 1$$
$$C(x) = \int 1\,dx = x + D$$

Opće rješenje je $y = \frac{x+D}{\cos x}$.
Partikularno rješenje dobivamo za $y = 0$ i $x = 0$ iz čega slijedi da je $D = 0$.
Konačno rješenje je $y = \frac{x}{\cos x}$.

Napomena 12.2.6. Kod drugog koraka uvijek mora doći do poništavanja dijela izraza u kojem se javlja $C(x)$. Mora ostati samo dio s $C'(x)$ iz kojeg onda integriranjem dobivamo funkciju $C(x)$.

12.3 Integralna krivulja

Integralna krivulja, odnosno porodica integralnih krivulja je grafički prikaz općeg rješenja diferencijalne jednadžbe.
Već smo spomenuli da je opće rješenje skup funkcija, a ne jedna funkcija jer se u zapisu javlja konstanta C. Razlog tome leži u postupku dobivanja općeg rješenje (rješenje neodređenog integrala).

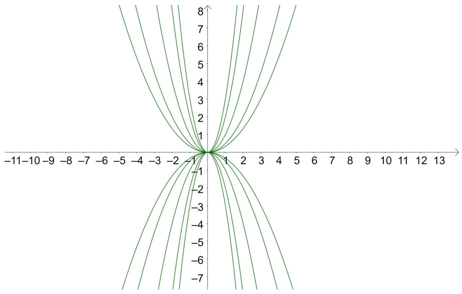
Zadatak 12.3.1. Odredite diferencijalnu jednadžbu čije je rješenje zadana porodica funkcija. Skicirajte tu porodicu.

a) $y(x) = Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$, b) $y(x) = Cx$, $C \in \mathbb{R}$, c) $y(x) = Ce^x$, $C \in \mathbb{R}$, d)* $y(x) = C_1(x - C_2)^2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Rješenje.

a)

$$y = Cx^2$$
$$y' = 2Cx$$
$$C = \frac{y'}{2x}$$



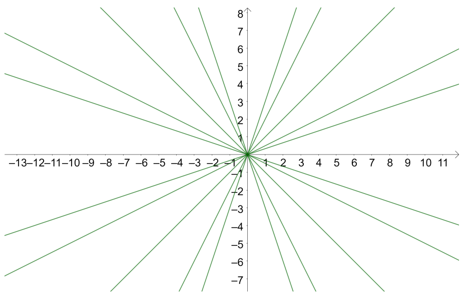
Slika 12.1: $y(x) = Cx^2$ su parabole kojima je tjeme u $(0,0)$, a zbog $C \in \mathbb{R}$ mogu biti i konveksne i konkavne.

Vraćamo se s konstantom u zadanu porodicu.

$$y = Cx^2$$
$$y = \frac{y'}{2x}x^2$$
$$y = \frac{1}{2}y'x$$
$$y'x - 2y = 0$$

b)

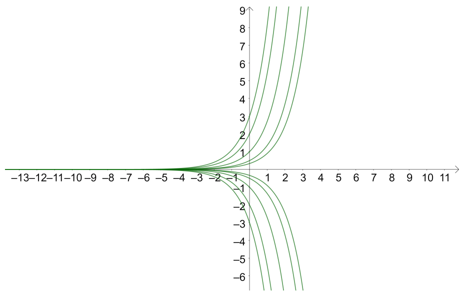
$$y = Cx$$
$$y' = C$$
$$y = y'x$$
$$y'x - y = 0$$



Slika 12.2: $y(x) = Cx$ su pravci koji prolaze kroz $(0,0)$, a zbog $C \in \mathbb{R}$ mogu biti padajući i rastući.

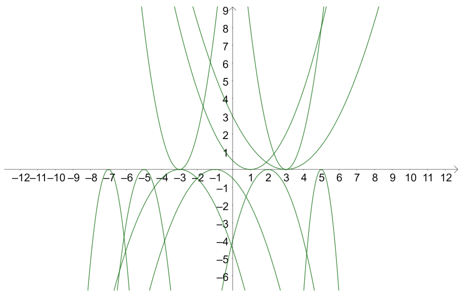
c)

$$y = Ce^x$$
$$y' = Ce^x$$
$$C = \frac{y'}{e^x}$$
$$y = \frac{y'}{e^x}e^x$$
$$y' - y = 0$$



Slika 12.3: $y(x) = Ce^x$ su eksponencijalne funkcije čiji graf prolazi kroz $(0, C)$, a zbog $C \in \mathbb{R}$ ti grafovi mogu biti rastući i padajući.

d)* Ovdje imamo dvije konstante koje moramo izraziti. Zato radimo prvu i drugu derivaciju od y.



Slika 12.4: $y(x) = C_1(x - C_2)^2$ su parabole kojima je tjeme točka $(C_2, 0)$, a zbog $C_1 \in \mathbb{R}$ mogu biti i konveksne i konkavne.

$$y' = 2C_1(x - C_2)$$
$$y'' = 2C_1$$
$$C_1 = \frac{y''}{2}$$

$$y' = \frac{y''}{2} 2(x - C_2)$$
$$y' = y''x - y''C_2$$
$$C_2 y'' = y''x - y'$$
$$C_2 = \frac{y''x - y'}{y''}$$

$$y = C_1(x - C_2)^2$$
$$y = \frac{y''}{2}\left(x - \frac{y''x - y'}{y''}\right)^2$$
$$y = \frac{y''}{2}\left(x - \frac{y''x}{y''} + \frac{y'}{y''}\right)^2$$
$$y = \frac{y''}{2} \cdot \frac{(y')^2}{(y'')^2}$$
$$y = \frac{(y')^2}{2y''}$$
$$(y')^2 - 2yy'' = 0$$

Poglavlje 13

Obične diferencijalne jednadžbe 2. reda

U ovom poglavlju naučit ćemo rješavati diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima, tj. jednadžbe oblika $y'' + py' + qy = f(x)$ pri čemu su p i q konstante, a $f(x)$ funkcija koja ovisi o varijabli x.

13.1 Homogene diferencijalne jednadžbe

Homogene diferencijalne jednadžbe drugog reda su oblika $y'' + py' + qy = 0$. Postupak rješavanja je da se od diferencijalne jednadžbe najprije napiše karakteristična jednadžba i to na način da se y zamijeni s 1, y' s λ i y'' s λ^2.
Karakteristična jednadžba je onda zapravo kvadratna jednadžba: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Ovisno o tipu rješenja koja ta kvadratna jednadžba ima, zapisujemo rješenje homogene diferencijalne jednadžbe.

1. REALNA RAZLIČITA RJEŠENJA $(\lambda_1 \neq \lambda_2) \quad \Rightarrow \quad y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
2. REALNO DVOSTRUKO RJEŠENJE $(\lambda_1 = \lambda_2) \quad \Rightarrow \quad y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x}$
3. KOMPLEKSNO KONJUGIRANA RJEŠENJA $(\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm \beta i)$
   $\Rightarrow \quad y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$

C_1 i C_2 su realne konstante.

Zadatak 13.1.1. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Rješenje. Karakteristična jednadžba je

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Njezina su rješenja $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = 2$ pa je rješenje $y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Zadatak 13.1.2. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Rješenje. Karakteristična jednadžba je

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0.$$

Njezina su rješenja $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ pa je rješenje $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Zadatak 13.1.3. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

Rješenje. Ovdje zapravo tražimo partikularno rješenje zadane jednadžbe, no najprije računamo opće rješenje.
Karakteristična jednadžba je

$$\lambda^2 + 4 = 0.$$

Njezina su rješenja $\lambda_{1,2} = \pm 2i = 0 \pm 2i$ pa zaključujemo da je $\alpha = 0$ i $\beta = 2$. Opće rješenje je onda oblika $y = e^{0\cdot x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)$.
$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$
$y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x$
$y'(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = -2C_1 \sin 0 + 2C_2 \cos 0 \quad \Rightarrow \quad 2C_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1$
Partikularno rješenje je $y = \sin(2x)$.

13.2 Nehomogene diferencijalne jednadžbe

Nehomogene diferencijalne jednadžbe su oblika $y'' + py' + qy = f(x)$.
Postupak rješavanja je da se najprije riješi pripadna homogena jednadžba: $y'' + py' + qy = 0$. Njezino rješenje označavamo s y_H (ili y_0).
Nadalje, na temelju sljedećeg kriterija odredi se partikularno rješenje (y_p). Konačno rješenje početno zadane diferencijalne jednadžbe je zbroj y_H i y_P, tj. $y = y_H + y_P$.
Kriterij dobivanja partikularnog rješenja (na temelju izgleda desne strane $f(x)$):

1. Ako je $f(x)$ oblika $e^{ax}P_n(x)$ gdje je $P_n(x)$ polinom n-tog stupnja i

   a) ako a nije rješenje karakteristične jednadžbe, onda je $y_P = e^{ax}Q_n(x)$ gdje je $Q_n(x)$ polinom n-tog stupnja s neodređenim koeficijentima,

b) ako je a rješenje karakteristične jednadžbe, onda je $y_P = xe^{ax}Q_n(x)$ gdje je $Q_n(x)$ polinom n-tog stupnja s neodređenim koeficijentima.

2. Ako je $f(x)$ oblika $e^{ax}\left(P_n(x)\cos(bx) + Q_m(x)\sin(bx)\right)$ gdje su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi n-tog i m-tog stupnja te

   a) ako a nije rješenje karakteristične jednadžbe, onda je
   $y_P = e^{ax}\left(S_N(x)\cos(bx) + T_N(x)\sin(bx)\right)$, N je maksimum brojeva n i m,

   b) ako a je rješenje karakteristične jednadžbe, onda je
   $y_P = xe^{ax}\left(S_N(x)\cos(bx) + T_N(x)\sin(bx)\right)$, N je maksimum brojeva n i m.

   $S_N(x)$ i $T_N(x)$ su polinomi stupnja N s neodređenim koeficijentima.

Napomena 13.2.1. Kad kažemo da je $Q_n(x)$ polinom s neodređenim koeficijentima, mislimo na neki općeniti polinom kojem koeficijenti mogu biti bilo koji brojevi. Formalno bismo ga zapisali kao

$$Q_n(x) = A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1x + A_0,$$

gdje su $A_0, A_1, \cdots, A_n$ koeficijenti.
Npr. za $n = 0$ takav je $Q_0(x) = Ax^0 = A$, za $n = 1$ to je $Q_1(x) = Ax + B$, za $n = 2$ je $Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ itd.

Zadatak 13.2.2. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y'' - 8y' + 7y = 14$.

Rješenje. 1. homogena

$$y'' - 8y' + 7y = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0$$

$$\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = 1$$

$$y_H = C_1e^{7x} + C_2e^x$$

2. nehomogena, $f(x) = 14$
Iz kriterija pod 1.) pri čemu je $a = 0$, $n = 0$ i $P_0(x) = 14$ zaključujemo da se radi o a) dijelu kriterija (jer $a = 0$ nije rješenje homogene jednadžbe) prema kojem je $y_P = e^{0x} \cdot A$ ($Q_0(x) = A$ je polinom stupnja 0 s neodređenim koeficijentom).

$$y_P = A$$
$$y_P' = 0$$
$$y_P'' = 0$$

Uvrstimo to u početnu diferencijalnu jednadžbu da bismo dobili A.

$$y'' - 8y' + 7y = 14$$
$$7A = 14$$
$$A = 2$$
$$y_P = 2$$

Konačno rješenje je $y = y_H + y_P = C_1 e^{7x} + C_2 e^x + 2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Zadatak 13.2.3. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y'' + 2y' + y = e^{2x}$.

Rješenje. 1. homogena

$$y'' + 2y' + y = 0$$
$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$$
$$y_H = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

2. nehomogena, $f(x) = e^{2x} = e^{2x} \cdot 1$

Iz kriterija pod 1.) pri čemu je $a = 2$, $n = 0$ i $P_0(x) = 1$ zaključujemo da se radi o a) dijelu (jer $a = 2$ nije rješenje homogene jednadžbe) prema kojem je $y_P = e^{2x} \cdot A$ ($Q_0(x) = A$ je polinom stupnja 0 s neodređenim koeficijentom).

$$y_P = Ae^{2x}$$
$$y_P' = 2Ae^{2x}$$
$$y_P'' = 4Ae^{2x}$$

Uvrstimo to u početnu diferencijalnu jednadžbu da bismo dobili A.

$$y'' + 2y' + y = e^{2x}$$

$$4Ae^{2x} + 4Ae^{2x} + Ae^{2x} = e^{2x}$$

$$9Ae^{2x} = e^{2x} \quad / : e^{2x}$$

$$9A = 1$$

$$A = \frac{1}{9}$$

$$y_P = \frac{1}{9}e^{2x}$$

Konačno rješenje je $y = y_H + y_P = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \frac{1}{9}e^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Zadatak 13.2.4. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y'' - y = e^x$.

Rješenje. 1. homogena

$$y'' - y = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 1$$

$$y_H = C_1e^x + C_2e^{-x}$$

2. nehomogena, $f(x) = e^x = e^x \cdot 1$

Iz kriterija pod 1.) pri čemu je $a = 1$, $n = 0$ i $P_0(x) = 1$ zaključujemo da se radi o b) dijelu (jer $a = 1$ je rješenje homogene jednadžbe) prema kojem je $y_P = Axe^x$ ($Q_0(x) = A$ je polinom stupnja 0 s neodređenim koeficijentom).

$$y_P' = 1 \cdot Ae^x + Axe^x$$

$$y_P'' = Ae^x + Ae^x + Axe^x = 2Ae^x + Axe^x$$

Uvrstimo to u početnu diferencijalnu jednadžbu da bismo dobili A.

$$y'' - y = e^x$$

$$2Ae^x + Axe^x - Axe^x = e^x$$

$$2Ae^x = e^x \quad / : e^x$$

$$2A = 1$$

$$A = \frac{1}{2}$$

$$y_P = \frac{1}{2}xe^x$$

Konačno rješenje je $y = y_H + y_P = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x$.

Zadatak 13.2.5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y'' - 4y = (25x + 5)\cos x$.

Rješenje. 1. homogena

$$y'' - 4y = 0$$
$$\lambda^2 - 4 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \pm 2$$
$$y_H = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$$

2. nehomogena, $f(x) = (25x + 5)\cos x = e^{0x} \cdot ((25x + 5)\cos x + 0\sin x)$
Iz kriterija pod 2.) pri čemu je $a = 0$, $n = 1$, $P_1(x) = 25x + 5$, $m = 0$, $Q_0(x) = 0$ i $b = 1$ zaključujemo da se radi o a) dijelu (jer $a = 0$ nije rješenje homogene jednadžbe) prema kojem je $N = 1$ (veći od dva broja: 0 i 1) te $y_P = e^{0x} \cdot ((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x)$ ($Ax + B$ i $Cx + D$ su polinomi stupnja 1 s neodređenim koeficijentima).

$$\begin{aligned}
y_P &= (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x \\
y_P' &= A\cos x - (Ax + B)\sin x + C\sin x + (Cx + D)\cos x = \\
&= (A + Cx + D)\cos x + (C - Ax - B)\sin x \\
y_P'' &= C\cos x - (A + Cx + D)\sin x - A\sin x + (C - Ax - B)\cos x = \\
&= (2C - Ax - B)\cos x - (2A + Cx + D)\sin x
\end{aligned}$$

Uvrstimo to u početnu diferencijalnu jednadžbu da bismo dobili A, B, C i D.

$$y'' - 4y = (25x + 5)\cos x$$

$$(2C - Ax - B)\cos x - (2A + Cx + D)\sin x -$$
$$- 4(Ax + B)\cos x - 4(Cx + D)\sin x = (25x + 5)\cos x$$
$$(2C - 5Ax - 5B)\cos x + (-2A - 5Cx - 5D)\sin x = (25x + 5)\cos x + 0 \cdot \sin x$$

Iz toga dobivamo da za svaki x vrijedi

$$2C - 5Ax - 5B = 25x + 5$$
$$-2A - 5Cx - 5D = 0,$$

iz čega onda slijedi sustav jednadžbi

$$-5A = 25$$

$$2C - 5B = 5$$

$$-5C = 0$$

$$-2A - 5D = 0.$$

Jednostavno dobivamo da je $A = -5$, $B = -1$, $C = 0$ i $D = 2$. Partikularno rješenje je $y_P = (-5x - 1)\cos x + 2\sin x$.

Konačno rješenje je $y = y_H + y_P = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + (-5x - 1)\cos x + 2\sin x$.