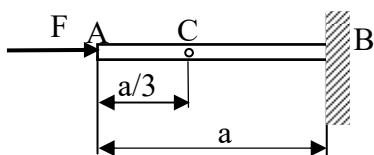
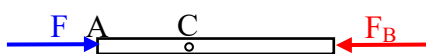


Zadatak 1. U štapu AB duljine na koji u točki A djeluje sila F izmjereno je naprezanje σ . Koliko iznose pomaci točaka A i C? Koliki bi bili pomaci istih točaka ako bi se sila F pomaknula u točku C. Zadano je: $E=210000\text{MPa}$, $a=299\text{mm}$, $\sigma=-57\text{Mpa}$.



Iz slike je vidljivo da sila F djeluje na cijeloj duljini štapa AB a kao posljedica njenog djelovanja u točki B pojavljuje se reaktivna sila koja je po iznosu i pravcu djelovanja jednaka, a po orijentaciji suprotna sili F što je lako dokazati primjenom znanja stečenih u poglavlju „Oslobađanje tijela veza.“ Grafički predočeno to izgleda ovako:



U ovom tipu zadataka u pravilu ne moramo računati iznos reaktivne sile iako prethodnu činjenicu treba uvijek imati na umu. Aktivna sila F i reaktivna sila u točki B su vanjske sile koje uzrokuju pojavu unutarnje sile $N=-F$ i naprezanja $\sigma<0$ zato jer obje sile djeluju tako da stlaćuju štap od. žele ga skratiti (u tom slučaju predznak unutarnje sile N je negativan). Pomak bilo koje točke računat ćemo uvijek u odnosu na čvrstu točku (nepomični oslonac ili uklještenje kao u ovom primjeru). Pomake točaka A i C izračunat ćemo prema izrazima:

$$\Delta l_A = \frac{N \cdot a}{A \cdot E} \quad ; \quad \Delta l_C = \frac{N \cdot \frac{2}{3} \cdot a}{A \cdot E}$$

U gornjem izrazu nepoznanice su unutarnja sila N i površina poprečnog presjeka A koje međusobno podijeljene daju naprezanje tj.:

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

što supstitucijom u gornje izraze daje vrijednosti pomaka točaka A i C:

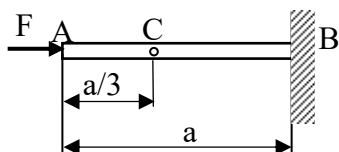
$$\Delta l_A = -0,0816\text{mm} \quad ; \quad \Delta l_C = -0,0541\text{mm} .$$

Predznak pomaka je negativan jer je $\sigma<0$ zbog $N<0$ što znači da je nastupilo skraćenje štapa odn. točke A i C su se približile točki B.

Pomakne li se sila F u točku C štap između točaka A i C sada postaje neopterećen tj. unutarnja sila između točaka A i C postaje jednaka nuli ($N_{A-C}=0$) dok se između točaka C i B ništa ne mijenja jer je unutarnja sila F između tih točaka i dalje jednaka sili F ($N_{C-B}=-F$). To ima za posljedice da su sada pomaci točaka A i C jednaki jer će se sve točke koje se nalaze lijevo od točke C pomaknuti za isti iznos koliko se pomakne i točka C obzirom na činjenicu da je na tom dijelu unutarnja sila jednaka nuli. Prema tome, iznos pomaka je.

$$\Delta l_C = \frac{N \cdot \frac{2}{3} \cdot a}{A \cdot E} = \Delta l_A = -0,0541\text{mm} .$$

Zadatak 2. Štap AB u opterećenom stanju (silom F) ima duljinu a , a deformacija iznosi ε . Koliki je pomak točke C ? Do kojeg iznosa se smije povećati sila F da se u štapu ne bi prekoračilo dopušteno naprežanje uz ostale uvjete nepromijenjene? Zadano je: $\varepsilon = -0,0003$; $F = 4500\text{N}$, $E = 210000\text{MPa}$, $\sigma_{DOP} = -95\text{MPa}$, $a = 399,20\text{mm}$.



Iz zadane vrijednosti deformacije ε možemo izračunati duljinu neopterećenog štapa a' : Zadana je duljina a opterećenog tj. deformiranog štapa!

$$\varepsilon = \frac{\Delta a}{a'} = \frac{a' - a}{a'} = -0,0003 \quad \Rightarrow \quad a' = \frac{a}{1 - \varepsilon} = 399,32\text{mm},$$

skraćenje štapa iznosi $\Delta a = a' - a = -0,12\text{mm}$.

Skraćenje štapa nastupilo je zbog djelovanja vanjske sile F i može se izraziti kao:

$$\Delta a = \frac{N \cdot a'}{A \cdot E}$$

Komentar: skraćenje štapa ima negativnu vrijednost jer je $N = -F$.

Iz ovog izraza možemo izračunati površinu A čija nam je vrijednost potrebna za računanje pomaka točke C :

$$A = \frac{N \cdot a'}{\Delta a \cdot E} = \frac{-F \cdot a'}{\Delta a \cdot E} = 71,3\text{mm}^2$$

Pomak točke C je :

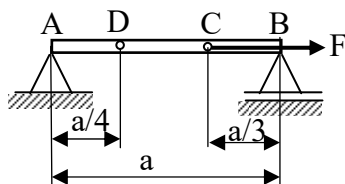
$$\Delta l_C = \frac{N \cdot \frac{2}{3} a'}{A \cdot E} = -0,08\text{mm}$$

Iznos sile F' izračunat ćemo iz uvjeta dopuštenog naprežanja uz $N = F'$:

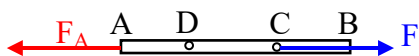
$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \sigma_{DOP} \quad \Rightarrow \quad F' = \sigma_{DOP} \cdot A = 6773,5\text{N}$$

Sila se smije povećati do tog iznosa da bi još bio zadovoljen uvjet dopuštenog naprežanja.

Zadatak 3. Štap AB, okruglog poprečnog presjeka polumjera r i duljine a , opterećen je silom F u točki C . Koliki je pomak točke C ako je poznat pomak Δl_D točke D ? Koliki bi bili pomaci točaka C i B ako bi se sila F premjestila u točku D ? Zadano je: $\Delta l_D = 0,0011\text{mm}$, $r = 20\text{mm}$, $E = 210000\text{MPa}$, $a = 800\text{mm}$.



Komentar: sila djeluje u točki C, a kao posljedica toga u nepomičnom osloncu pojavit će se reaktivna sila kako je prikazano sljedećom slikom:



Iako nam ova slika nije nužno potrebna za rješavanje zadatka, kao što je već rečeno u 1. zadatku, ipak na njoj možemo uočiti neke važne činjenice, a to je da će se pomaci točaka događati u odnosu na čvrstu točku (nepomični oslonac u točki A) i točku C u kojoj se nalazi hvatište sile F. Također, naprezanje između točaka A i C različito je od nule jer tu postoji unutarnja sila N ($\sigma_{A-C} > 0 \Leftrightarrow N = F$) dok je između točaka C i B naprezanje jednak nuli jer je unutarnja sila jednaka nuli ($\sigma_{C-B} = 0 \Leftrightarrow N = 0$).

Pomak točke D je:

$$\Delta l_D = \frac{F \cdot \frac{a}{4}}{A \cdot E} = \frac{F \cdot a}{4 \cdot r^2 \cdot \pi} = 0,0011 \text{ mm} \quad \text{uz } A = r^2 \cdot \pi$$

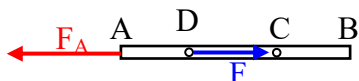
Iz ovog izraza možemo izračunati silu F:

$$F = \frac{\Delta l_D \cdot 4 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot E}{a} = 1451,4 \text{ N}$$

Dalje možemo izračunati pomak točke C, uvijek pazeći da uzmemo udaljenost točke čiji pomak računamo od nepomične točke (točka A):

$$\Delta l_C = \frac{F \cdot \frac{2}{3} \cdot a}{r^2 \cdot \pi \cdot E} = 0,00293 \text{ mm}$$

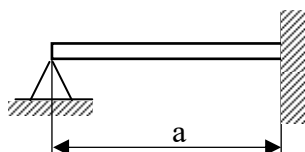
U nastavku zadatka treba silu F premjestiti u točku D kako slijedi:



Pomaci točaka B i C jednaki su pomaku točke D jer je sada unutarnja sila u svim presjecima desno od točke D jednaka nuli pa je:

$$\Delta l_B = \Delta l_C = \Delta l_D = \frac{F \cdot a}{A \cdot E} = 0,0011 \text{ mm}$$

Zadatak 4. Štap AB, okruglog poprečnog presjeka polumjera r duljine 700,15mm, treba ugraditi između nepomičnog oslonca i čvrstog zida između kojih je razmak a ? Koliko će uslijed toga nastupiti početno naprezanje (uključujući i predznak)? Za koliko se treba zagrijati/ohladiti štap da bi on ispao iz ležišta, a za koliko da bi se udvostručilo početno naprezanje? Zadano je: $r=15\text{mm}$, $E=210000\text{MPa}$, $a=700\text{mm}$, $\alpha=11 \cdot 10^{-6}\text{m/mK}$.



Komentar: oslobađanjem tijela veza pokazalo bi se da je ovo statički neodređeni zadatak tj. da ima više nepoznanica nego što se može postaviti uvjeta ravnoteže. Bez obzira na tu činjenicu,

zadatak se može riješiti jer se vrijednosti nepoznatih veličina vezane uz pojave u unutarnjem presjeku štapa mogu izračunati.

Duljina štapa u neopterećenom stanju iznosi 700,15mm što je za 0,15mm dulje nego što je razmak između nepomičnog oslonca i zida. Da bi se štap mogao ugraditi između te dvije točke potrebno ga je skratiti nekom uzdužnom sila. U tako „na silu“ ugrađenom štapu pojavit će se tlačna unutarnja sila ($N < 0$) i tlačno naprezanje ($\sigma < 0$). Takvo naprezanje nazivamo početno ili montažno naprezanje i ono je stalno prisutno u štapu.

Deformacija štapa je:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{a} = \frac{-0,15}{700} = -0,000214$$

Početno naprezanje koje je zbog nastupilo u štapu je:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = -45 \text{ MPa}$$

Da bi štap ispio iz ležišta treba postići da u njemu nestane uzdužne sile N jer se tada štap više ne upire u zid. To znači da štap treba hlađenjem skratiti upravo za iznos koliko je bio predugačak tj. za 0,15mm a to ćemo izračunati koristeći izraz:

$$\Delta \ell = \alpha \cdot a \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta \ell}{\alpha \cdot a} = -19,5^\circ \text{C} \quad (\Delta \ell < 0)$$

Da bi se udvostručilo početno naprezanje ($\sigma = -45 \text{ MPa}$) štap treba grijati jer će se grijanjem on htjeti produljiti ali mu zbog čvrstih oslonaca to nije dopušteno. To znači da će se on o zid upirati sve većom i većom unutarnjom silom N. U jednom trenutku ta će sila prouzročiti nastanak traženog naprezanja $\sigma_t = -90 \text{ MPa}$. Da je štapu bilo omogućeno nesmetano produljenje uslijed grijanja za traženi Δt on bi se produljio za 0,15mm. Kako mu to nije bilo omogućeno on je u stvari ostao skraćen za tih 0,15mm bez obzira što je zagrijavan!

Slijedi:

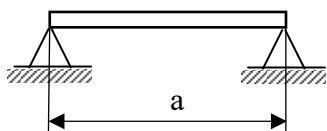
$$|\Delta \ell| = \frac{N \cdot a}{A \cdot E} = |\sigma_t| \cdot \frac{a}{E} \quad \text{i} \quad |\Delta \ell| = \alpha \cdot a \cdot |\Delta t|$$

Izjednačavanjem prethodnih izraza dobije se temperatura Δt za koju je potrebno ugrijati štap da bi se udvostručilo početno naprezanje:

$$|\Delta t| = \frac{|\sigma_t|}{\alpha \cdot E} = 19,5^\circ \text{C}$$

Napomena: u prethodnim izrazima korišteni su znakovi apsolutnih vrijednosti kod nekih veličina kao bi se isključile nejasnoće koje bi eventualno mogle nastupiti zbog činjenice da štap grijemo ($\Delta t > 0$) a da se on zapravo skraćuje $\Delta \ell < 0$ zato jer mu čvrsto uležištenje ne dopušta produljenje.

Zadatak 5. Štap AB, okruglog poprečnog presjeka polumjera r, duljine ℓ , ugrađen je između dva nepomična oslonca čiji je razmak a. Koliko je uslijed toga nastupilo početno naprezanje (uključujući i predznak)? Za koliko se treba zagrijati/ohladiti štap da bi više ne bi bilo naprezanja, a za koliko da bi se pojavilo dopušteno naprezanje? Zadano je: $r=15 \text{ mm}$, $\ell=700 \text{ mm}$, $a=700,2 \text{ mm}$, $E=210000 \text{ MPa}$, $\sigma_{\text{DOP}}=110 \text{ MPa}$ $\alpha=11 \cdot 10^{-6} \text{ m/mK}$.



Komentar: iz zadanih podataka vidljivo je da je štap bio prekratak pa ga je prilikom ugradnje trebalo produljiti (aksijalnom silom) zbog čega se u štapu pojavilo početno vlačno naprezanje.

Produljenje štapa iznosi:

$$\Delta \ell = 700,2 - 700 = 0,2 \text{ mm}$$

Iz izraza za produljenje može se izračunati iznos početnog vlačnog naprezanja:

$$\Delta \ell = \frac{N \cdot \ell}{A \cdot E} = \sigma_0 \cdot \frac{\ell}{E} \Rightarrow \sigma_0 = \frac{\Delta \ell}{\ell} \cdot E = 60 \text{ MPa}$$

Da bi nestalo početnog vlačnog naprezanja štap je potrebno zagrijati kako bi se on produljio i time poništio početno naprezanje ili možemo razmišljati i ovako: da smo štap prije ugradnje zagrijali za Δt koji bi dao produljenje od $\Delta \ell = 0,2 \text{ mm}$ mogli smo ugraditi bez početnog naprezanja. Također, valja napomenuti da bi se taj iznos naprezanja pojavio nakon što smo ugradili zagrijani štap i pustili ga da se ohladi na početnu temperaturu.

Da bi štap produljili za $\Delta \ell = 0,2 \text{ mm}$ potrebno ga je zagrijati za Δt što možemo izračunati prema:

$$\Delta \ell = \alpha \cdot \ell \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta \ell}{\alpha \cdot \ell} = 25,97^\circ \text{C}$$

Ugrijemo li štap za ovaj iznos poništiti će se početno naprezanje. Sada je naprezanje u štapu jednako nuli ($\sigma = 0$).

U nastavku potrebno je izračunati za koliko treba zagrijati ili ohladiti štap da bi u njemu dopušteno (vlačno) naprezanje. Obzirom da u štapu već postoji početno (montažno) naprezanje pozitivnog predznaka potrebno je znati koji dodatni iznos naprezanja treba grijanjem ili hlađenjem štapa:

$$\Delta \sigma = \sigma_{DOP} - \sigma_0 = 110 - 60 = 50 \text{ MPa}$$

Taj iznos postići će se hlađenjem štapa za neki Δt . Hlađenjem se štap želi skratiti ali mu to čvrsto uležištenje ne dopušta pa se zapravo produljuje za iznos $\Delta \ell_{DOP}$ što uzrokuje porast toplinskog naprezanja sve do iznosa dopuštenog naprezanja σ_{DOP} . Može se pisati:

$$\Delta \ell_{DOP} = \frac{N \cdot \ell}{A \cdot E} = \Delta \sigma \cdot \frac{\ell}{E}$$

Također vrijedi:

$$\Delta \ell_{DOP} = \alpha \cdot \ell \cdot \Delta t$$

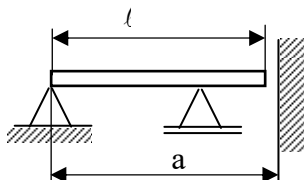
Izjednačavanjem ova dva izraza dobiva se:

$$\Delta t = \frac{\Delta \sigma}{E \cdot \alpha} = 21,6^\circ \text{C}$$

Komentar: hlađenjem štapa u kojem već postoji početno vlačno naprezanje od 60 MPa za 21,6°C u štapu će pojaviti dodatno vlačno naprezanje $\Delta \sigma = 50 \text{ MPa}$ čime se postiže iznos dopuštenog naprezanja σ_{DOP} . Praktično gledano, unošenjem početnog naprezanja smanjili smo radno područje štapa jer će iznos dopuštenog naprezanja postići prije nego da nema početnog naprezanja ili da je ono negativnog predznaka. Pravilan odabir predznaka početnog naprezanja može omogućiti širi raspon toplinskog opterećenja štapa što je posebno važno za

konstrukcije koje su u svojim eksploatacijskim uvjetima podložne većoj promjeni radne temperature.

Zadatak 6. Štap AB, okruglog poprečnog presjeka polumjera r , duljine ℓ grije se za Δt . Koliko će uslijed toga nastupiti naprezanje (uključujući i predznak)? Zadano je: $r=15\text{mm}$, $E=210000\text{MPa}$, $\Delta t=45^\circ\text{C}$, $\ell=699,80\text{mm}$ $a=700\text{mm}$, $\alpha=11\cdot 10^{-6}\text{m/mK}$.



Komentar: iz slike je vidljivo da je duljina štapa ℓ manja od udaljenosti a između čvrstog oslonca i zida. Grijanjem se štap počinje produljivati i dokle god mu je to moguće činiti slobodno, bez prepreke u njemu se neće pojaviti naprezanje. U trenutku kad štap dodirne zid, a zagrijavanje se nastavi, štap će se htjeti i dalje produljivati ali mu to više nije moguće pa se on počinje sve više upirati o zid (skraćuje se) i u njemu se pojavljuje tlačno naprezanje. Prvo je potrebno ispitati hoće li se uopće za zadani Δt štap dovoljno produljiti i dotaknuti zid.

Zračnost između štapa i zida iznosi:

$$\Delta a = a - \ell = 0,2\text{mm}$$

Da bi se štap produljio za taj iznos potrebno ga je zagrijati za neki Δt_1 koji ćemo izračunati iz izraza:

$$\Delta a = \alpha \cdot \ell \cdot \Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{\Delta a}{\alpha \cdot \ell} = 25,98^\circ\text{C}$$

Zagrije li se štap za taj iznos on će se produljiti dovoljno tek da dotakne zid i u tom trenutku se u njemu još neće pojaviti naprezanje. Vidimo da je zadani Δt veći od izračunatog Δt_1 pa se može zaključiti da će štap daljnjim zagrijavanjem htjeti dodatno produljiti ali mu zid to ne dopušta pa će se u njemu pojaviti tlačno naprezanje.

Razlika temperatura za koju još treba zagrijati štap iznosi:

$$\Delta t_\sigma = 45^\circ\text{C} - 25,98^\circ\text{C} = 19,01^\circ\text{C}$$

Zagrijavanje štapa za taj iznos prouzročilo bi produljenje:

$$\Delta a_\sigma = \alpha \cdot \ell \cdot \Delta t_\sigma$$

Obzirom da zid štapu ne dopušta da se slobodno produlji za taj iznos, štap će se zapravo skratiti i prouzročiti pojavu tlačnog naprezanja. Vrijedi izraz:

$$\Delta a_\sigma = \frac{N \cdot \ell}{A \cdot E}$$

Izjednačavanjem ova dva izraza dobiva se naprezanje koje će nastupiti zbog zagrijavanja štapa za zadani Δt :

$$\sigma = \frac{N}{A} = \alpha \cdot \Delta t_\sigma \cdot E = -43,9\text{MPa}$$