

U nastavku su obrađene tri tipične i najjednostavnije situacije opterećenja grede (nosača) savijanjem. To je opterećenje koncentriranom silom, momentom i kontinuiranim opterećenjem. Sve grede su istog izgleda i oslonjene su na dva oslonca, pomični i nepomični. Oslonci se nalaze na krajevima grede a ponašaju se isto onako kako je objašnjeno u prvom poglavlju „Pravilo izolacije.“ Ove tri situacije bit će jedine koje će se pojavljivati u zadacima, jedino što se može promijeniti su zadani brojevi, ali uz prikazani postupak lako je doći do novih rješenja.

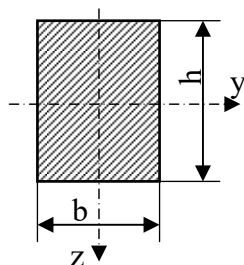
Kao posljedica vanjskih opterećenja u unutarnjim presjecima pojavljuju se unutarnje sile i momenti koji uzrokuju naprezanje. Te unutarnje sile i momente moguće je grafički prikazati kako je to ovdje i učinjeno. Kako se došlo do toga, zbog kratkog vremena, nije ovdje objašnjeno. Prikazani dijagrami su dijagram unutarnjih sila (Q dijagram) i dijagram unutarnjih momenata (M dijagram). Ovaj potonji nam je važan za računanje naprezanja prema općem izrazu za naprezanje:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad [\text{MPa}] \quad (1)$$

gdje je M_y [Nm] moment savijanja očitani iz M dijagrama ili izračunati kako je prikazano, a I_y moment tromosti [m^4]. Obratite pozornost na odabrani koordinatni sustav, kojem os y gleda okomito iz papira prema vama. To je ujedno indeks u prethodno opisanom momentu M_y i momentu tromosti I_y . Slovo z označava vrijednost koordinate z prema zadanom koordinatnom sustavu tj. udaljenost točke presjeka od neutralne osi tj. vrijednosti nula. Moment otpora w_y dobiva se prema izrazu:

$$w_y = \frac{I_y}{z_{\max}} \quad (2)$$

gdje z_{\max} predstavlja maksimalnu vrijednost koordinate z tj. točku presjeka koja je najudaljenija od neutralne osi. Za gredu pravokutnog poprečnog presjeka to izgleda ovako.



Moment tromosti i momenta otpora su:

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (3)$$

$$\text{uz } z_{\max} = \frac{h}{2} \Rightarrow w_y = \frac{b \cdot h^2}{6} \quad (4)$$

Uvrštavanjem izraza (2) u izraz (1) dobijemo sljedeći izraz.

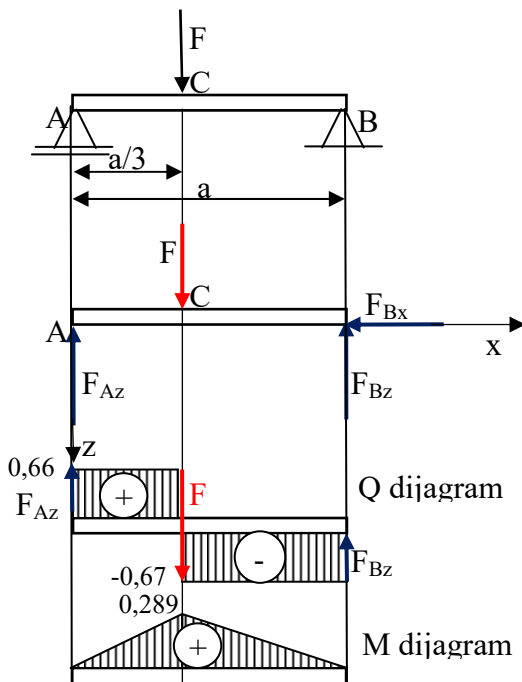
$$\sigma = \frac{M_y}{w_y} \quad (5)$$

a uvrštavanjem izraza (4) u izraz (5) za konkretni poprečni presjek prikazan slikom dobije se:

$$\sigma = \frac{6 \cdot M_y}{b \cdot h^2} \quad (6)$$

Ovaj izraz nam omogućuje da izračunamo najveće naprezanje u određenom presjeku, a ako u brojnik uvrstimo iznos maksimalnog momenta kojeg očitamo iz M dijagrama dobit ćemo maksimalno naprezanje u greda. Sa stanovišta proračuna to nam je najinteresantnija veličina.

Zadatak 1. Greda je opterećena koncentriranom silom F. Koliko iznosi maksimalno naprezanje u gredi ako je poprečni presjek grede pravokutnik postavljen po visini dimenzije b x h (širina puta visina)? Zadano je: F=1,32kN, a=1,3m, b=80mm, h=120mm.



Zadatak počinjemo oslobađanjem tijela veza kao što smo prije naučili. Rješenja su:

$$\sum F_z = 0 \quad -F_{Az} + F + F_{Bz} = 0$$

$$\sum M_B = 0 \quad -F_{Az} \cdot a + F \cdot \frac{2 \cdot a}{3} = 0$$

Iz ove dvije jednačbe dobiju se rješenja:

$$F_{Az} = 0,66 \text{ kN},$$

$$F_{Bz} = 0,327 \text{ kN},$$

$$F_{Bx} = 0$$

Kao rezultat vanjskih opterećenja, ovdje su to aktivna sila F i sile reakcija F_{Az} , F_{Bz} i F_{Bx} (=0), u gredi su se pojavile unutarnje sile i momenti koji su prikazani odgovarajućim Q i M dijagramima koje nećemo učiti crtati. Zadaci koji će se zadavati kod provjere znanja imat će kvalitativno iste dijagrame, a mijenjat će se samo brojevi, pa je na temelju prikazanog postupka moguće doći do novih vrijednosti dijagrama.

Za računanje maksimalnog naprezanja potrebna nam je maksimalna vrijednost momenta koju očitamo iz M-dijagrama. ta se vrijednost uvijek pojavljuje u točki gdje djeluje koncentrirana sila (F).

Kako smo izračunali tu vrijednost?

Tako što smo izračunali vrijednost momenta u točki C kao umnožak jedne ili druge reakcije i njihovih udaljenosti od točke C. vrijednost mora biti ista. To izgleda ovako:

$$M_{y \max} = F_{Az} \cdot \frac{a}{3} = F_{Cz} \cdot \frac{2 \cdot a}{3} = 0,28 \text{ kNm}$$

Prema tome u točki C nastupa maksimalno naprezanje i koristeći izraz (6) lako se izračuna iznos:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{y \max}}{w_y} = \frac{0,289 \cdot 10^6}{\frac{80 \cdot 120^2}{6}} = 1,51 \text{ MPa}$$

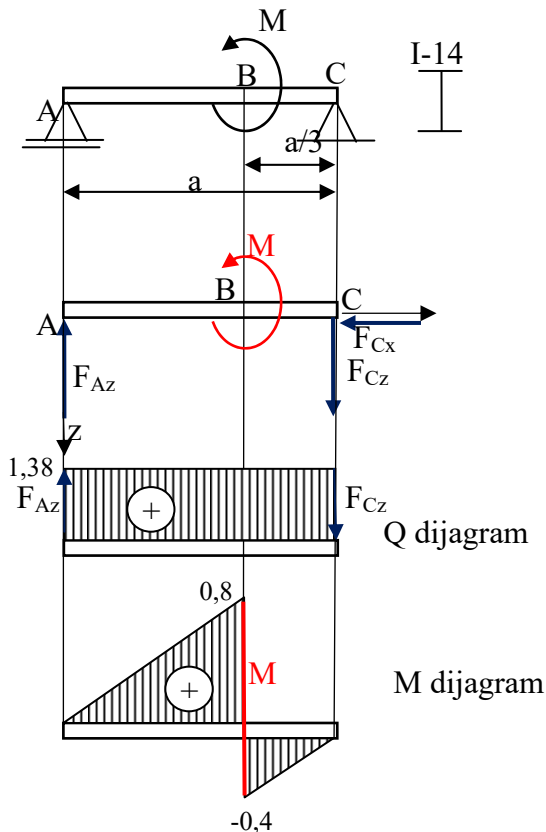
Za iznos momenta M_y uzima se po apsolutnoj vrijednosti najveću vrijednost iz M dijagrama. To ovdje nije problem jer je cijeli dijagram pozitivan.

Vrijednost naprezanja vrlo je mala što znači da je poprečni presjek grede puno prevelik tj. poprečni presjek je loše iskorišten. Greda bi mogla biti manjih dimenzija.

Napomenimo da korištenjem općeg izraza za naprezanje možemo izračunati naprezanje u bilo kojoj točki presjeka!

Ponovimo da nam je u praksi uvijek najinteresantnije mjesto gdje naprezanje postiže svoj maksimum.

Zadatak 2. Greda je opterećena momentom savijanja M . Koliko iznosi maksimalno naprezanje u gredi ako je poprečni presjek grede standardni profil I-14 okrenut prema slici? Zadano je: $M=1,2\text{kNm}$, $a=1,3\text{m}$. Moment otpora profila I-14 očitajte iz priložene tablice profila.



Zadatak počinjemo oslobađanjem tijela veza kao što smo prije naučili. Rješenja su:

$$\Sigma F_z = 0 \quad -F_{Az} + F_{Cz} = 0$$

$$\Sigma M_C = 0 \quad -F_{Az} \cdot a + M = 0$$

Iz ove dvije jednačbe dobiju se rješenja:

$$F_{Az} = F_{Cz} = 0,92\text{kN},$$

$$F_{Cx} = 0$$

Maksimalni moment $M_{y\max}$ ćemo izračunati tako da izračunamo momente reaktivnih sila oko točke u kojoj djeluje moment M te ih usporedimo. Zbog jednostavnosti ćemo izračunati apsolutne vrijednosti momenata savijanja::

$$|M_{yA}| = F_{Az} \cdot \frac{2}{3} \cdot a = 0,92\text{kN} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,3\text{m} = 0,8\text{kNm}$$

$$|M_{yC}| = F_{Cz} \cdot \frac{1}{3} \cdot a = 0,92\text{kN} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,3\text{m} = 0,4\text{kNm}$$

Vidimo da je:

$$|M_{yA}| > |M_{yC}|$$

pa možemo zaključiti da je maksimalni iznos momenta:

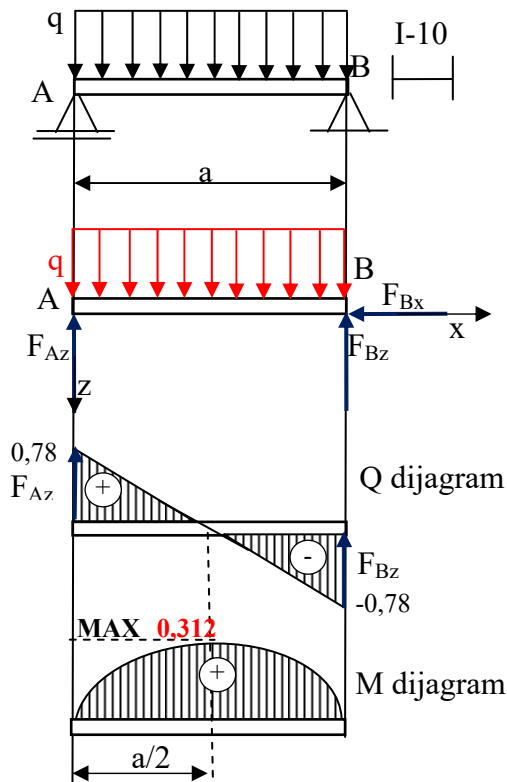
$$|M_{yA}| = M_{y\max} = 0,8\text{kNm}$$

U tablici nađimo redak I-14, sve podatke o tom profilu možemo očitati u tom retku. Pripazite na koordinatne osi jer se ne podudaraju s našim koordinatnim sustavom. O kojim osima se radi vidjet ćete usporedbom slika kako je profil postavljen. U konkretnom slučaju vrijednost je $w_y = 81,9 \cdot 10^3 \text{mm}^3$. Primijetite da os x u tablici odgovara našoj osi y !

Naposljetku iznos naprezanja je:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{y_{\max}}}{w_y} = \frac{0,8 \cdot 10^6}{81,9 \cdot 10^3} = 9,76 \text{ MPa}$$

Zadatak 3. Greda je opterećena kontinuiranim opterećenjem q . Koliko iznosi maksimalno naprezanje u gredi ako je poprečni presjek grede standardni profil I-10 položen po visini (v. sliku)? Zadano je: $q=1,2\text{kN/m}$, $a=1,3\text{m}$. Moment otpora profila I-10 očitajte iz priložene tablice profila.



Zadatak počinjemo oslobađanjem tijela, ovdje malo detaljnije jer se od sada nismo susreli s pojmom kontinuiranog opterećenja q . Ta veličina ima jedinicu kN/m pa kada nam je poznato na kojoj duljini (metara) djeluje njen iznos ima jedinicu $(\text{k})\text{N}$ kao i sila. Pema svom djelovanju u unutarnjim presjecima razlikuje od sile. Oslobodimo gredu veza i postavimo uvjete ravnoteže. Prije toga uočavamo odmah da je $F_{Cx}=0$

$$\sum F_z = 0 \quad -F_{Az} - F_{Bz} + q \cdot a = 0$$

Uočimo novost, a to je djelovanje kontinuiranog opterećenja q (kN/m) na duljini a (m) što daje ekvivalentnu silu u N . Ovdje se to može poistovjetiti s djelovanjem koncentrirane sile F .

$$\sum M_A = 0 \quad F_{Bz} \cdot a - q \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot a = 0$$

Za moment što ga čini sila F_{Cz} oko točke A ne treba objašnjenja, pa pogledajmo kao djeluje kontinuirano opterećenje q . Ono djeluje na duljini a što daje iznos u $(\text{k})\text{N}$ i to je isti član kao u $\sum F_z = 0$ tj. $q \cdot a$. Tu ekvivalentnu silu treba pomnožiti krakom koji ćemo izračunati kao udaljenost težišta pravokutnika koji prikazuje kontinuirano opterećenje q od točke oko koje računamo momenta, ovdje je to točka A.

To je član $\frac{1}{2} \cdot a$.

Iz uvjeta ravnoteže iznosi reakcija su:
 $F_{Az}=F_{Bz}=0,78\text{kN}$

Karakteristično za ovu vrstu opterećenja je funkcijska ovisnost unutarnjeg momenta M_y o x u obliku polinoma drugog stupnja.

Uočimo da se između točaka A i B pojavila parabola (polinom) 2. stupnja kako je rečeno i da je između te dvije točke postigla i svoj maksimum i to točno na sredini grede ($a/2$).

Vrijednost maksimuma parabole tj. maksimalnog iznosa momenta između točaka A i B dobivamo kako slijedi:

$$M_{y_{\max}} = F_{Az} \cdot \frac{a}{2} - q \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} = 0,312 \text{ kNm}$$

Izračunajmo sada naprezanje za profil I-10 koji je sada položen po visini kako je prikazano slikom.

Zbirka zadataka iz „Osnova strojarstva“ – studij „Primijenjena kemija“
Savijanje - riješeni primjeri

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{y\max}}{w_y} = \frac{0,312 \cdot 10^6}{4,88 \cdot 10^3} = 63,9 \text{ MPa}$$

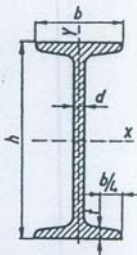
Maksimalni moment opet smo očitali iz M dijagrama, a vrijednost momenta otpora I-10 profila je ona za os y iz tablice jer je taj profil sada položen po visini ili možemo reći i polegnut.

Čelični profili I
vruće valjani (JUS C.B3.131 — 1962)

Statičke veličine:
I — moment tromosti plohe
W — moment otpora

Polumjer tromosti:
 $i_x = \sqrt{I_x/A}$
 $i_y = \sqrt{I_y/A}$

Konstruktivske mjere — vidi str. 431!



Oznaka*	Dimenzije mm				Pre-sjek S mm ²	Dulj. masa kg/m	Statičke veličine			
	h	b	d	t			I _x 10 ⁴ mm ⁴ (= cm ⁴)	I _y 10 ⁴ mm ⁴ (= cm ⁴)	W _x 10 ³ mm ³ (= cm ³)	W _y 10 ³ mm ³ (= cm ³)
8	80	42	3,9	5,9	758	5,95	77,8	6,3	19,5	3,00
10	100	50	4,5	6,8	1060	8,32	171	12,2	34,2	4,88
12	120	58	5,1	7,7	1420	11,2	328	21,5	54,7	7,41
14	140	66	5,7	8,6	1830	14,4	573	35,2	81,9	10,7
16	160	74	6,3	9,5	2280	17,9	935	54,7	117	14,8
18	180	82	6,9	10,4	2790	21,9	1450	81,3	161	19,8
20	200	90	7,5	11,3	3350	26,3	2140	117	214	26,0
(22)	220	98	8,1	12,2	3960	31,1	3060	162	278	33,1
24	240	106	8,7	13,1	4610	38,2	4250	221	354	41,7
26	260	113	9,4	14,1	5340	41,9	5740	288	442	51,0
(28)	280	119	10,1	15,2	6110	48,0	7590	364	543	61,2
30	300	125	10,8	16,2	6910	54,2	9800	451	653	72,2
(32)	320	131	11,5	17,3	7780	61,1	12510	555	782	84,7
34	340	137	12,2	18,3	8680	68,1	15700	674	923	98,2
(36)	360	143	13,0	19,5	9710	76,2	19610	818	1090	114,4
(38)	380	149	13,7	20,5	10700	84,0	24010	975	1250	131,4
40	400	155	14,4	21,6	11800	92,6	29210	1160	1460	149,8

* Treba se kloniti dimenzija u zagradama.

Normalne duljine čeličnih profila I: 4...15 m.

Konstruktivske mjere čeličnih profila (po DIN 997)
Sve mjere u mm.

Čelični kutni profili

b/h	c ₁	c ₂	d ₀ max.	b/h			
				c ₁	c ₂	d ₀ max.	d ₀ max.
20	12	—	4,3	75	40	—	23
25	15	—	6,4	80	45	—	23
30	17	—	8,4	90	50	—	25
35	18	—	11	100	45	60	25
40	22	—	11	110	45	70	25
45	25	—	13	120	50	80	25
50	30	—	13	130	50	90	25
55	30	—	17	140	50	95	28
60	35	—	17	150	50	105	28
65	35	—	21	160	60	115	28
70	40	—	21	200	60	150	28

Čelični profili C

b	c	d ₀ max.	h ₁	b			
				c	d ₀ max.	h ₁	h ₁
42	25	11	33	75	40	23	151
45	25	13	46	80	45	23	167
50	30	13	64	85	45	25	184
55	30	17	82	90	50	25	200
60	35	17	98	95	50	25	216
65	35	21	115	100	55	25	222
70	40	21	133	—	—	—	—

Čelični profili I

b	c	d ₀ max.	h _r	b			
				c	d ₀ max.	h ₁	h ₁
42	22	6,4	50	113	60	17	208
50	28	6,4	75	119	62	17	225
58	32	8,4	92	125	64	21	241
66	34	11	109	131	70	21	258
74	40	11	125	137	74	21	274
82	44	13	142	143	76	23	290
90	48	13	159	149	82	23	306
98	52	13	176	155	86	23	323
106	56	17	192	—	—	—	—

