Prvi pismeni kolokvij iz Fizike II (A)–rješenja

24. travnja 2017.

1. Tri točkasta naboja, q_1, q_2, i q_3 tvore neutralni sustav. Naboji se nalaze u točkama s vektorima položaja kako slijedi: $\vec{r}_1 = \left(-2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}\right)\, nm$, $\vec{r}_2 = \left(-\vec{i} + \vec{j}\right)\, nm$ i $\vec{r}_3 = \left(-4\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right)\, nm$. Električni potencijal u točci A s vektorom položaja $\vec{r}_A = \left(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)\, nm$ jednak je $\Phi(\vec{r}_A) = -2\, V$, a u točci B s vektorom položaja $\vec{r}_B = \left(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}\right)$ potencijal je jednak $\Phi(\vec{r}_B) = -3\, V$. Električni potencijal na beskonačnoj udaljenosti od sustava jednak je 0. Izračunajte:
   a) naboje q_1, q_2 i q_3, zanemarujući činjenicu da se naboj pojavljuje kao cjelobrojni umnožak elementarnog naboja.
   b) električni dipolni moment sustava.
   c) električni potencijal u točci s vektorom položaja $\vec{r} = \left(\vec{i} - 2\vec{k}\right)\, \mu m$

Rješenje:

a) Iz uvjeta neutralnosti i vrijednosti potencijala u dvjema točkama dobivamo tri jednadžbe s trima nepoznanicama:

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 + q_3 &= 0 \\ k\frac{q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_A|} + k\frac{q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_A|} + k\frac{q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_A|} &= \Phi(\vec{r}_A) \\ k\frac{q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_B|} + k\frac{q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_B|} + k\frac{q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_B|} &= \Phi(\vec{r}_B) \end{aligned}$$

Budući da je $1\, nm = 10^{-9}\, m$, $k = 9\cdot 10^9\, VmC^{-1}$ i $q_3 = -q_1 - q_2$, ovaj sustav triju jednadžbi možemo svesti na sljedeći sustav dviju jednadžbi:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{13}} - \frac{1}{\sqrt{38}}\right) q_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{38}}\right) q_2 &= -\frac{2}{9}\cdot 10^{-18} \\ \left(\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{50}}\right) q_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{50}}\right) q_2 &= -\frac{3}{9}\cdot 10^{-18} \end{aligned}$$

Determinanta Δ ovoga sustava jednadžbi jednaka je:

$$\Delta = \left(\frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{50}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{13}} - \frac{1}{\sqrt{38}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{38}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{50}}\right) \approx 0,0047927$$

Rješenje sustava jednadžbi je:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{\frac{3}{9}\left(\frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{38}}\right) - \frac{2}{9}\left(\frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{50}}\right)}{\Delta}\cdot 10^{-18}\, C \approx 3,0025\cdot 10^{-18}\, C \\ q_2 &= \frac{\frac{2}{9}\left(\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{50}}\right) - \frac{3}{9}\left(\frac{1}{\sqrt{13}} - \frac{1}{\sqrt{38}}\right)}{\Delta}\cdot 10^{-18}\, C \approx -3,3189\cdot 10^{-18}\, C \\ q_3 &= -q_1 - q_2 \approx 0,3163\cdot 10^{-18}\, C \end{aligned}$$

b) Električni dipolni moment $\vec{p}$ sustava naboja definiran je jednadžbom:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= q_1\vec{r}_1 + q_2\vec{r}_2 + q_3\vec{r}_3 = q_1\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_3\right) + q_2\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_3\right) = \\ &= \left[3,0025\left(2\vec{i} - 5\vec{j} - 2\vec{k}\right) - 3,3189\left(3\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}\right)\right]\cdot 10^{-27}\, Cm = \\ &= \left(-3,952\vec{i} - 11,694\vec{j} + 3,952\vec{k}\right)\cdot 10^{-27}\, Cm \end{aligned}$$

c) Budući da se udaljenost točke promatranja, tj. iznos vektora $\vec{r}$, od ishodišta izražava u mikrometrima, a udaljenost naboja od ishodišta se izražava u nanometrima, tj. 1000 puta manjim vrijednostima, za izračunavanje potencijala uzimamo približni izraz:

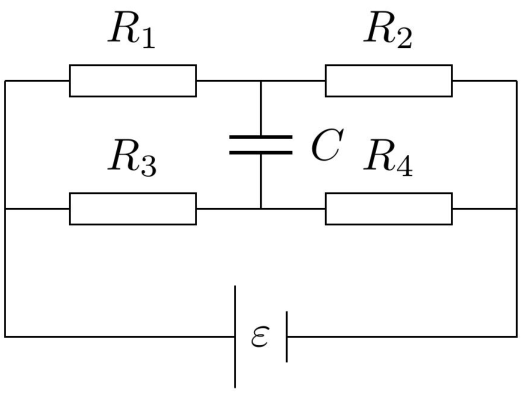
$$\Phi(\vec{r}) = k\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} \approx -9,54\cdot 10^{-6}\, V$$

2. Pločasti električni kapacitor ima površinu ploča jednaku $S = 1\,m^2$, a udaljenost između ploča jednaka je $d = 1\,cm$. Između ploča nalazi se sredstvo s relativnom dielektričnom konstantom jednakoj $\epsilon_r = 100$. Ako je napon na pločama jednak $U = 1000\,V$, izračunajte:

   a) naboj na pločama.
   b) broj takvih istovjetnih kapacitora spojenih paralelno ako u njih želimo pohraniti energiju od $1\,kWh$.
   c) iznos električnog polja između ploča.

Rješenje:
a) Kapacitet C kapacitora jednak je $C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d} = 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 100 \frac{1}{0,01} = 8,854 \cdot 10^{-8}\,F$. Naboj na pločama jednak je $Q = CU = 8,854 \cdot 10^{-5}\,C$
b) Energija sadržana u kapacitoru jednaka je $\mathcal{E} = \frac{1}{2} CU^2 = 4,427 \cdot 10^{-2}\,J$. Energija od $1\,kWh$ jednaka je $3,6 \cdot 10^6\,j$. Kapacitori spojeni paralelno imaju ukupni kapacitet jednak zbroju pojedinačnih kapacitora. Budući da su pod istim naponom, ukupna energija što bi ju sadržavali N tako spojenih kapacitora bila bi jednaka $N \cdot 4,427 \cdot 10^{-2}\,J$. Da bismo uskladištili energiju od $1\,kWh$ u N kapacitora, morali bismo imati $N = \frac{3,6 \cdot 10^6}{4,427 \cdot 10-2} = 8,13 \cdot 10^7$ kapacitora.
c) Iznos električnog polja jednak je $E = \frac{U}{d} = 10^5\,Vm^{-1}$.

3. U spoju prikazanom na slici imamo sljedeće podatke: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 3\Omega$ i $R_4 = 4\Omega$.



Ako je naboj na kapacitoru kapaciteta $C = 1\mu F$ jednak $Q = 100\,nC$, izračunajte:

   a) struje kroz otpornike.
   b) napon izvora ε.
   c) ukupnu toplinsku energiju zbog protjecanja struje u otpornicima tijekom vremenskog intervala $\Delta t = 1\,s$

Rješenje:
a) i b) Istosmjerna, tj. neizmjenična, struja ne prolazi kroz kapacitor. Struja kroz otpornike R_1 i R_2 je ista i jednaka $I_1 = I_2 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}$, a kroz otpornike R_3 i R_4 je također ista i jednaka $I_3 = I_4 = \frac{\varepsilon}{R_3 + R_4}$. Primjenom drugog Kirchhoffovog pravila na krug $R_1 - -C - -R_3 - -R_1$, jednadžbi za struje I_1 i I_3 te jednadžbe $U_C = \frac{Q}{C} = 0,1\,V$, dobivamo jednakosti:

$$I_1 R_1 + U_C - I_3 R_3 = 0 \Longrightarrow \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right) \varepsilon + U_C = 0 \Longrightarrow \varepsilon = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_3 (R_1 + R_2) - R_1 (R_3 + R_4)} U_C =$$
$$= \frac{21}{2} 0,1 = 1,05\,V$$
$$I_1 = I_2 = \frac{1,05}{3} = 0,35\,A\ ,\ I_3 = I_4 = \frac{1,05}{7} = 0,15\,A$$

Ovdje valja istaći sljedeće: u primjeni drugog pravila napon na kapacitoru uzet je s pozitivnim predznakom u smjeru obilaženja petlje. Razlog tomu je što je pad napona na otporniku R_3 veći od pada napona na otporniku R_1, tj. zato što vrijedi nejednakost $\frac{R_3}{R_3 + R_4} \left(= \frac{3}{7}\right) > \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left(= \frac{1}{3}\right)$. Iz te nejednakosti slijedi da je „gornja“ ploča kapacitora na višem potencijalu od njegove „donje“ ploče. U zadatku nije rečeno koja je ploča kapacitora pozitivno nabijena, a koja negativno, već je dana samo vrijednost naboja na kapacitoru. Također smo odabrali smjer struja I_1 i I_3 u skladu s polaritetom izvora ε. Da smo jednadžbu napisali s negativnim predznakom ispred U_C, to ne bi bilo pogrješno, ali bismo iz predznaka konačnog rezultata za ε, koji bi bio negativan, morali zaključiti da je polaritet napona na kapacitoru suprotan od onoga što smo ga pretpostavili. Da su vrijednosti otpora otpornika odabrane tako da bi vrijedila jednakost $\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_3}{R_3 + R_4}$, iz gornje jednadžbe ne bismo mogli ništa zaključiti o izvoru ε, nego bismo morali zaključiti da je zadatak pogrješno postavljen, odnosno da je količina naboja na kapacitoru jednaka 0 zato što je $U_C = 0$. I na kraju, da smo odabrali bilo koju drugu petlju koja bi sadržavala kapacitor, dobili bismo isti rezultat. Sami se uvjerite u to.
c) Snaga P električnoga kruga jednaka je $P = \frac{\varepsilon^2}{R_{uk}}$, gdje je R_{uk} ukupni, odnosno ekvivalentni otpor. Za taj otpor vrijedi jednakost $\frac{1}{R_{uk}} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4} = \frac{10}{21}\,\Omega^{-1}$. Za snagu dobivamo $P = \left(\frac{21}{2} \cdot 0,1\right)^2 \frac{10}{21} = 0,525\,W$, a za oslobođenu toplinu ΔQ dobivamo $\Delta Q = P \Delta t = 0,525\,J$.

4. Ravni vodič duljine $l = 5\,cm$ giba se okomito na svoju dužinu brzinom $v = 1\,ms^{-1}$ u homogenom magnetskom polju indukcije $B = 1\,T$. Vodičem teče struja jakosti $I = 1\,A$. Ako kut između struje i magnetskog polja iznosi $\theta = 45^o$, izračunajte:

   a) silu na vodič.

   b) snagu potrebnu za održavanje gibanja vodiča ako je brzina vodiča u istoj ravnini sa strujom i magnetskim poljem.

Rješenje:
a) Sila $\vec{F}$ na vodič jednaka je $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$. Po iznosu ta je sila jednaka $F = IlB\sin(45^o) = 0,035\,N$.
b) Da bi se pod djelovanjem sile $\vec{F}$ održavalo gibanje stalnom brzinom $\vec{v}$ potrebna je snaga $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$. Budući da se vektor brzine nalazi u ravnini što ju tvore struja, tj. vektor $\vec{l}$, i vektor magnetskog polja $\vec{B}$, sila je okomita na brzinu $\vec{v}$, pa je zato $P = 0$.

5. Kružni prsten polumjera $r = 10\,cm$ nalazi se u homogenom magnetskom polju okomitom na ravninu prstena. Magnetsko polje mijenja se po zakonu $B(t) = B_0\sin(\omega t)$, gdje je t vrijeme, $B_0 = 1\,T$, a $\omega = 2\,s^{-1}$. Izračunajte:

   a) najveću moguću vrijednost struje u prstenu ako je njegov električni otpor jednak $R = 1\,\Omega$.

   b) ovisnost magnetskog momenta o vremenu.

Rješenje:
a) Inducirani napon u prstenu je $U_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$, gdje je $\Phi_B = \pi r^2 B_0 \sin(\omega t)$. Tako dobivamo $U_{ind} = -\pi r^2 \omega B_0 \cos(\omega t)$. Struja je jednaka $I = \frac{U_{ind}}{R} = -\frac{\pi r^2 \omega B_0}{R}\cos(\omega t)$, što znači da imamo izmjeničnu struju s amplitudom $I_{max} = \frac{\pi r^2 \omega B_0}{R} = 0,0628\,A$.
b) Magnetski je moment μ jednak umnošku struje i površine πr^2. To je vektor okomit na ravninu kružnice. Izraz za magnetski moment je:

$$\vec{\mu} = I\pi r^2 \vec{n} = -\frac{\pi^2 r^4 \omega B_0}{R}\cos(\omega t)\vec{n}$$

gdje je $\vec{n}$ jedinični vektor površine što ju zatvara prsten, po pravilu desne ruke. Prsti desne ruke pokuzuju smjer i orijentaciju struje, a palac smjer i orijentaciju magnetskog momenta.