Prvi pismeni kolokvij iz Fizike II (B)–rješenja

24. travnja 2017.

1. Tri točkasta naboja, q_1, q_2, i q_3 tvore neutralni sustav. Naboji se nalaze u točkama s vektorima položaja kako slijedi: $\vec{r}_1 = \left(-2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}\right)\, nm$, $\vec{r}_2 = \left(\vec{i} - \vec{j}\right)\, nm$ i $\vec{r}_3 = \left(4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}\right)\, nm$. Električni potencijal u točci A s vektorom položaja $\vec{r}_A = \left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)\, nm$ jednak je $\Phi(\vec{r}_A) = 2\, V$, a u točci B s vektorom položaja $\vec{r}_B = \left(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}\right)$ potencijal je jednak $\Phi(\vec{r}_B) = -3\, V$. Električni potencijal na beskonačnoj udaljenosti od sustava jednak je 0. Izračunajte:

   a) naboje q_1, q_2 i q_3, zanemarujući činjenicu da se naboj pojavljuje kao cjelobrojni umnožak elementarnog naboja.

   b) električni dipolni moment sustava.

   c) električni potencijal u točci s vektorom položaja $\vec{r} = \left(\vec{i} - 2\vec{k}\right)\, \mu m$

Rješenje:

a) Iz uvjeta neutralnosti i vrijednosti potencijala u dvjema točkama dobivamo tri jednadžbe s trima nepoznanicama:

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 + q_3 &= 0 \\ k\frac{q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_A|} + k\frac{q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_A|} + k\frac{q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_A|} &= \Phi(\vec{r}_A) \\ k\frac{q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_B|} + k\frac{q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_B|} + k\frac{q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_B|} &= \Phi(\vec{r}_B) \end{aligned}$$

Budući da je $1\, nm = 10^{-9}\, m$, $k = 9\cdot 10^9\, VmC^{-1}$ i $q_3 = -q_1 - q_2$, ovaj sustav triju jednadžbi možemo svesti na sljedeći sustav dviju jednadžbi:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{26}}\right) q_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{26}}\right) q_2 &= \frac{2}{9}\cdot 10^{-18} \\ \left(\frac{1}{\sqrt{25}} - \frac{1}{\sqrt{22}}\right) q_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{22}}\right) q_2 &= -\frac{3}{9}\cdot 10^{-18} \end{aligned}$$

Determinanta Δ ovoga sustava jednadžbi jednaka je:

$$\Delta = \left(\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{26}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{22}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{26}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{25}} - \frac{1}{\sqrt{22}}\right) \approx 0,039837$$

Rješenje sustava jednadžbi je:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{\frac{3}{9}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{26}}\right) + \frac{2}{9}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{22}}\right)}{\Delta}\cdot 10^{-18}\, C \approx 6,48995\cdot 10^{-18}\, C \\ q_2 &= \frac{-\frac{3}{9}\left(\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{26}}\right) - \frac{2}{9}\left(\frac{1}{\sqrt{25}} - \frac{1}{\sqrt{22}}\right)}{\Delta}\cdot 10^{-18}\, C \approx -0,31477\cdot 10^{-18}\, C \\ q_3 &= -q_1 - q_2 \approx -6,17518\cdot 10^{-18}\, C \end{aligned}$$

b) Električni dipolni moment $\vec{p}$ sustava naboja definiran je jednadžbom:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= q_1\vec{r}_1 + q_2\vec{r}_2 + q_3\vec{r}_3 = q_1\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_3\right) + q_2\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_3\right) = \\ &= \left[6,48995\left(-6\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}\right) - 0,31477\left(-3\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}\right)\right]\cdot 10^{-27}\, Cm = \\ &= \left(-37,995\vec{i} + 7,433\vec{j} + 12,036\vec{k}\right)\cdot 10^{-27}\, Cm \end{aligned}$$

c) Budući da se udaljenost točke promatranja, tj. iznos vektora $\vec{r}$, od ishodišta izražava u mikrometrima, a udaljenost naboja od ishodišta se izražava u nanometrima, tj. 1000 puta manjim vrijednostima, za izračunavanje potencijala uzimamo približni izraz:

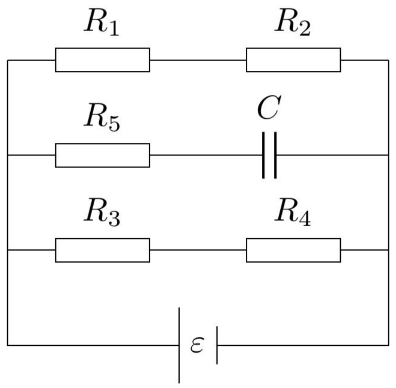
$$\Phi(\vec{r}) = k\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} \approx -3,06\cdot 10^{-2}\, V$$

2. Pločasti električni kapacitor ima površinu ploča jednaku $S = 1\,m^2$, a udaljenost između ploča jednaka je $d = 1\,cm$. Između ploča nalazi se sredstvo s relativnom dielektričnom konstantom jednakoj $\epsilon_r = 100$. Ako je električno polje između ploča jednako $E = 1000\,Vm^{-1}$, izračunajte:

 a) naboj na pločama.
 b) energiju pohranjenu u kapacitoru.
 c) napon između ploča.

Rješenje:
a) i c) Kapacitet C kapacitora jednak je $C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d} = 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 100 \frac{1}{0,01} = 8,854 \cdot 10^{-8}\,F$. Napon U na pločama kapacitora jednak je $U = E \cdot d = 10\,V$, a naboj Q na njima jednak je $Q = CU = 8,854 \cdot 10^{-7}\,C$.
b) Energija sadržana u kapacitoru jednaka je $\mathcal{E} = \frac{1}{2}CU^2 = 4,427 \cdot 10^{-6}\,J$.

3. U spoju prikazanom na slici imamo sljedeće podatke: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $R_4 = 4\Omega$ i $R_5 = 5\Omega$.



Ako je struja kroz otpornik R_1 jednaka $I_1 = 3\,A$, a kapacitet $C = 100\,\mu F$, izračunajte:

 a) napon izvora ε.
 b) naboj na kapacitoru.
 c) ukupnu toplinsku energiju zbog protjecanja struje u otpornicima tijekom vremenskog intervala $\Delta t = 1\,s$.

Rješenje:
a) Struja I_1 kroz otpornik R_1 jednaka je struji I_2 kroz otpornik R_2. Tako dobivamo $\varepsilon = I_1 (R_1 + R_2) = 9\,A$.
b) Otpornik R_5 je nevažan jer kroz njega ne prolazi nikakva struja. Kapacitor se nalazi pod naponom ε, što znači da se na njemu nalazi naboj $Q = C\varepsilon = 9 \cdot 10^{-4}\,C$. Ovdje valja napomenuti da je otpornik R_5 nevažan u električnom krugu s nepromjenljivim naponima i strujama. To da znači da bi kod svake promjene napona izvora, naprimjer pri uključivanju i isključivanju, otpornik R_5 bio važan zato što bi se kapacitor punio odnosno praznio, pa bi otpornikom R_5 tekla određena struja određeno kratko vrijeme.
c) Za ukupni otpor R_{uk} kruga dobivamo $\frac{1}{R_{uk}} = \frac{1}{R_1+R_2} + \frac{1}{R_3+R_4} = \frac{10}{21}\,\Omega^{-1}$. Snaga je P jednaka je $P = \frac{\varepsilon^2}{R_{uk}} \approx 38,57\,W$, a količina ΔQ oslobođene topline jednaka je $\Delta Q = P\Delta t = 38,57\,J$.

4. Ravni vodič duljine $l = 5\,cm$ giba se u smjeru svoje dužine brzinom $v = 1\,ms^{-1}$ u homogenom magnetskom polju indukcije $B = 1\,T$. Vodičem teče struja jakosti $I = 1\,A$. Ako kut između struje i magnetskog polja iznosi $\theta = 45^o$, izračunajte:

 a) silu na vodič.
 b) snagu potrebnu za održavanje gibanja vodiča.

Rješenje:
a) Sila $\vec{F}$ na vodič jednaka je $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$. Po iznosu ta je sila jednaka $F = IlB\sin(45^o) = 0,035\,N$.
b) Da bi se pod djelovanjem sile $\vec{F}$ održavalo gibanje stalnom brzinom $\vec{v}$ potrebna je snaga $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$. Budući da se vektor brzine nalazi u ravnini što ju tvore struja, tj. vektor $\vec{l}$, i vektor magnetskog polja $\vec{B}$, sila je okomita na brzinu $\vec{v}$, pa je zato $P = 0$.

5. Kvadratični prsten stranice $a = 20\,cm$ nalazi se u homogenom magnetskom polju okomitom na ravninu prstena. Magnetsko polje mijenja se po zakonu $B(t) = B_0 \cos(\omega t)$, gdje je t vrijeme, $B_0 = 1\,T$, a $\omega = 2\,s^{-1}$. Izračunajte:

 a) najveću moguću vrijednost struje u prstenu ako je njegov električni otpor jednak $R = 1\,\Omega$.
 b) ovisnost magnetskog momenta o vremenu.

Rješenje:

a) Inducirani napon u prstenu je $U_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$, gdje je $\Phi_B = a^2 B_0 \sin(\omega t)$. Tako dobivamo $U_{ind} = a^2 \omega B_0 \sin(\omega t)$. Struja je jednaka $I = \frac{U_{ind}}{R} = \frac{a^2 \omega B_0}{R} \sin(\omega t)$, što znači da imamo izmjeničnu struju s amplitudom $I_{max} = \frac{a^2 \omega B_0}{R} = 0,08\,A$.

b) Magnetski je moment μ jednak umnošku struje i površine a^2. To je vektor okomit na ravninu kružnice. Izraz za magnetski moment je:

$$\vec{\mu} = I a^2 \vec{n} = \frac{a^4 \omega B_0}{R} \sin(\omega t) \vec{n}$$

gdje je $\vec{n}$ jedinični vektor površine što ju zatvara prsten, po pravilu desne ruke. Prsti desne ruke pokuzuju smjer i orijentaciju struje, a palac smjer i orijentaciju magnetskog momenta.