Prvi pismeni kolokvij iz Fizike II (D)–rješenja

24. travnja 2017.

1. Tri točkasta naboja, q_1, q_2, i q_3 tvore neutralni sustav. Naboji se nalaze u točkama s vektorima položaja kako slijedi: $\vec{r}_1 = \left(3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}\right)\,nm$, $\vec{r}_2 = \left(-\vec{i} - \vec{j}\right)\,nm$ i $\vec{r}_3 = \left(-4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}\right)\,nm$. Električni potencijal u točci A s vektorom položaja $\vec{r}_A = \left(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)\,nm$ jednak je $\Phi(\vec{r}_A) = -2\,V$, a u točci B s vektorom položaja $\vec{r}_B = \left(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}\right)$ potencijal je jednak $\Phi(\vec{r}_B) = 3\,V$. Električni potencijal na beskonačnoj udaljenosti od sustava jednak je 0. Izračunajte:
   a) naboje q_1, q_2 i q_3, zanemarujući činjenicu da se naboj pojavljuje kao cjelobrojni umnožak elementarnog naboja.
   b) električni dipolni moment sustava.
   c) električni potencijal u točci s vektorom položaja $\vec{r} = \left(\vec{i} - 2\vec{k}\right)\,\mu m$

Rješenje:
a) Iz uvjeta neutralnosti i vrijednosti potencijala u dvjema točkama dobivamo tri jednadžbe s tri nepoznanice:

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 + q_3 &= 0 \\ k\frac{q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_A|} + k\frac{q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_A|} + k\frac{q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_A|} &= \Phi(\vec{r}_A) \\ k\frac{q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_B|} + k\frac{q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_B|} + k\frac{q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_B|} &= \Phi(\vec{r}_B) \end{aligned}$$

Budući da je $1\,nm = 10^{-9}\,m$, $k = 9\cdot 10^9\,VmC^{-1}$ i $q_3 = -q_1 - q_2$, ovaj sustav triju jednadžbi možemo svesti na sljedeći sustav dviju jednadžbi:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{50}}\right) q_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{50}}\right) q_2 &= -\frac{2}{9}\cdot 10^{-18} \\ \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{38}}\right) q_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{38}}\right) q_2 &= \frac{3}{9}\cdot 10^{-18} \end{aligned}$$

Determinanta Δ ovoga sustava jednadžbi jednaka je:

$$\Delta = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{38}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx -0,032455$$

Rješenje sustava jednadžbi je:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{-\frac{2}{9}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{38}}\right) - \frac{3}{9}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{50}}\right)}{\Delta}\cdot 10^{-18}\,C \approx 15,8094\cdot 10^{-18}\,C \\ q_2 &= \frac{\frac{3}{9}\left(\frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{50}}\right) + \frac{2}{9}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{38}}\right)}{\Delta}\cdot 10^{-18}\,C \approx -1,9514\cdot 10^{-18}\,C \\ q_3 &= -q_1 - q_2 \approx -13,8580\cdot 10^{-18}\,C \end{aligned}$$

b) Električni dipolni moment $\vec{p}$ sustava naboja definiran je jednadžbom:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= q_1\vec{r}_1 + q_2\vec{r}_2 + q_3\vec{r}_3 = q_1\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_3\right) + q_2\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_3\right) = \\ &= \left[15,8094\left(6\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}\right) - 1,9514\left(3\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}\right)\right]\cdot 10^{-27}\,Cm = \\ &= \left(89,0022\vec{i} - 57,3834\vec{j} + 25,7646\vec{k}\right)\cdot 10^{-27}\,Cm \end{aligned}$$

c) Budući da se udaljenost točke promatranja, tj. iznos vektora $\vec{r}$, od ishodišta izražava u mikrometrima, a udaljenost naboja od ishodišta se izražava u nanometrima, tj. 1000 puta manjim vrijednostima, za izračunavanje potencijala uzimamo približni izraz:

$$\Phi(\vec{r}) = k\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} \approx 3,02\cdot 10^{-5}\,V$$

2. Pločasti električni kapacitor ima površinu ploča jednaku $S = 1\,m^2$, a udaljenost između ploča jednaka je $d = 1\,mm$. Između ploča nalazi se sredstvo s relativnom dielektričnom konstantom jednakoj $\epsilon_r = 1000$. Ako je električno polje između ploča jednako $E = 1000\,Vm^{-1}$, izračunajte:

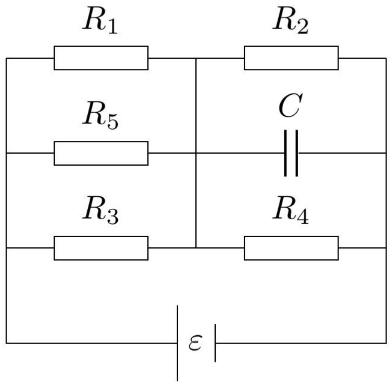
   a) naboj na pločama.

   b) energiju pohranjenu u kapacitoru.

   c) napon između ploča.

Rješenje:
a) i c) Kapacitet C kapacitora jednak je $C = \epsilon_0\epsilon_r\frac{S}{d} = 8,854\cdot 10^{-12}\cdot 1000\frac{1}{0,001} = 8,854\cdot 10^{-6}\,F$. Napon U na pločama kapacitora jednak je $U = E\cdot d = 1\,V$, a naboj Q na njima jednak je $Q = CU = 8,854\cdot 10^{-6}\,C$.
b)Energija sadržana u kapacitoru jednaka je $\mathcal{E} = \frac{1}{2}CU^2 = 4,427\cdot 10^{-6}\,J$.

3. U spoju prikazanom na slici imamo sljedeće podatke: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $R_4 = 4\Omega$ i $R_5 = 5\Omega$.



Ako je struja kroz otpornik R_1 jednaka $I_1 = 3\,A$, a kapacitet $C = 100\,\mu F$, izračunajte:

   a) napon izvora ε.

   b) naboj na kapacitoru.

   c) ukupnu toplinsku energiju zbog protjecanja struje u otpornicima tijekom vremenskog intervala $\Delta t = 1\,s$.

Rješenje:
a) Otpornici R_1, R_5 i R_3 nalaze se na istom naponu. Po drugom Kirchhoffovom pravilu, vrijede jednakosti $I_1R_1 - I_5R_5 = 0$ i $I_1R_1 - I_3R_3 = 0$. Iz tih jednakosti dobivamo $I_5 = \frac{3}{5}\,A$ odnosno $I_3 = 1\,A$. Ukupna struja kroz ta tri otpornika jednaka je $I_1 + I_5 + I_3 = \frac{23}{5}\,A = 4,6\,A$. Otpornici R_2 i R_4 su na istom naponu. Po drugom Kirchhoffovom pravilu za struje što protječu njima vrijedi jednadžba $I_2R_2 - I_4R_4 = 0$, a po prvom Kirchhoffovom pravilu vrijedi jednakost $I_2 + I_4 = I_1 + I_5 + I_3 = 4,6\,A$. Iz tih dviju jednakosti dobivamo $I_2 = \frac{4,6}{1+\frac{R_2}{R_4}}\,A = \frac{9,2}{3}\,A$, odnosno $I_4 = \frac{4,6}{3}\,A$.
Po drugom Kirchhoffovom pravilu dobivamo $\varepsilon = I_1R_1 + I_2R_2 = \frac{27,4}{3}\,V \approx 9,13\,V$.
b) Kapacitor se nalazi na istom naponu kao i otpornik R_2, odnosno na naponu $U_C = I_2R_2 = \frac{18,4}{3}\,V \approx 6,13\,V$, pa je naboj Q na kapacitoru jednak $Q = CU_C \approx 6,13\cdot 10^{-4}\,Q$.
c) Snagu P električnoga kruga izračunamo zbrajanjem snaga na pojedinim otpornicima, $P = I_1^2R_1 + I_2^2R_2 + I_3^2R_3 + I_4^2R_4 + I_5^2R_5 \approx (9 + 18,81 + 3 + 9,40 + 1,8)\,W \approx 42,01\,W$. Količina ΔQ oslobođene topline jednaka je $\Delta Q = P\Delta t \approx 42,01\,J$. Razumije se da smo isti rezultat mogli dobiti i na drukčiji način. Ukupni, tj. ekvivalentni, se otpor sastoji od serijskoga spoja dvaju paralelnih spojeva otpornika. Prvi paralelni spoj čine otpornici R_1, R_5 i R_3. Ukupni otpor R_{153} tog paralelnog spoja jednak je $R_{153} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1} = \frac{15}{23}\,\Omega$. Drugi paraleni spoj čine otpornici R_2 i R_4. Ukupni otpor R_{24} tog paralelnog spoja jednak je $R_{24} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{3}\,\Omega$. Ukupni otpor R_{uk} jednak je $R_{uk} = R_{153} + R_{24} = \frac{137}{69}\,\Omega \approx 1,986\,\Omega$. Snaga električnoga kruga je $P = \frac{\varepsilon^2}{R_{uk}} \approx 42,01\,W$.

4. Ravni vodič duljine $l = 5\,cm$ giba se pod kutem od 30^o u odnosu na svoju dužinu brzinom $v = 1\,ms^{-1}$ u homogenom magnetskom polju indukcije $B = 1\,T$. Vodičem teče struja jakosti $I = 1\,A$. Ako kut između struje i magnetskog polja iznosi $\theta = 45^o$, a vektor brzine se nalazi u ravnini što ju tvore struja i magnetsko polje, izračunajte:

   a) silu na vodič.

   b) snagu potrebnu za održavanje gibanja vodiča.

Rješenje:
a) Sila $\vec{F}$ na vodič jednaka je $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$. Po iznosu ta je sila jednaka $F = IlB\sin(45^o) = 0,035\,N$.
b) Da bi se pod djelovanjem sile $\vec{F}$ održavalo gibanje stalnom brzinom $\vec{v}$ potrebna je snaga $P = \vec{F}\cdot\vec{v}$. Budući da se vektor brzine nalazi u ravnini što ju tvore struja, tj. vektor $\vec{l}$, i vektor magnetskog polja $\vec{B}$, sila je okomita na brzinu $\vec{v}$, pa je zato $P = 0$.

5. Kvadratični prsten stranice $a = 20\,cm$ nalazi se u homogenom magnetskom polju okomitom na ravninu prstena. Magnetsko polje mijenja se po zakonu $B(t) = B_0 \cos(-\omega t)$, gdje je t vrijeme, $B_0 = 1\,T$, a $\omega = 2\,s^{-1}$. Izračunajte:

   a) najveću moguću vrijednost struje u prstenu ako je njegov električni otpor jednak $R = 0,1\,\Omega$.

   b) ovisnost magnetskog momenta o vremenu.

Rješenje:
a) Inducirani napon u prstenu je $U_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$, gdje je $\Phi_B = a^2 B_0 \cos(\omega t)$. Kosinus je parna funkcija, pa je predznak minus u njezinu argumentu nebitan. Tako dobivamo $U_{ind} = a^2 \omega B_0 \sin(\omega t)$. Struja je jednaka $I = \frac{U_{ind}}{R} = \frac{a^2 \omega B_0}{R} \sin(\omega t)$, što znači da imamo izmjeničnu struju s amplitudom $I_{max} = \frac{a^2 \omega B_0}{R} = 0,8\,A$.
b) Magnetski je moment μ jednak umnošku struje i površine a^2. To je vektor okomit na ravninu kružnice. Izraz za magnetski moment je:

$$\vec{\mu} = I a^2 \vec{n} = \frac{a^4 \omega B_0}{R} \sin(\omega t) \vec{n}$$

gdje je $\vec{n}$ jedinični vektor površine što ju zatvara prsten, po pravilu desne ruke. Prsti desne ruke pokuzuju smjer i orijentaciju struje, a palac smjer i orijentaciju magnetskog momenta.