

2016

# Procesi prijenosa i separacija

Jasna Prlić Kardum

Fakultet kemijskog

inženjerstva I tehnologije

[Pick the date]



1. UVOD .....	1
1.1. Fizikalne veličine.....	1
1.2. Prijenosne pojave – osnova jediničnih operacija.....	2
1.3. Tehnološki proces.....	3
2. OSNOVNI POJMOVI .....	5
2.1. Fizikalne osnove .....	6
2.2. Newton-ov zakon viskoznosti.....	6
2.3. Opći zakon očuvanja.....	8
2.4. Gustoća toka ili fluks .....	10
2.5. Koeficijenti pri prijenosnim pojavama.....	10
2.6. Mehanizmi prijenosa .....	11
2.7. Stacionarni i nestacionarni procesi.....	12
2.8. Reološki dijagrami.....	13
3. PRIJENOS KOLIČINE GIBANJA.....	16
3.1. Zakoni očuvanja.....	16
3.1.1. <i>Zakon očuvanja mase – jednačba kontinuiteta</i> .....	16
3.1.2. <i>Zakon očuvanja količine gibanja (II Newtonov zakon gibanja)</i> .....	17
3.1.3. <i>Zakon očuvanja energije (I zakon termodinamike)</i> .....	19
3.2. Vrste strujanja .....	21
3.2.1. <i>Reynoldsov eksperiment</i> .....	21
3.2.2. <i>Laminarno strujanje</i> .....	22
3.2.3. <i>Turbulentno strujanje</i> .....	24
3.2.4. <i>Moodyev dijagram</i> .....	27
3.4. Protjecanje .....	28
3.4.1. <i>Cjevovod</i> .....	28
3.4.2. <i>Pumpe</i> .....	30
3.4.3. <i>Specifični rad pumpe</i> .....	31
3.4.4. <i>Radna karakteristika pumpe</i> .....	32
3.4.5. <i>Podjela pumpi</i> .....	33
3.5. Optjecanje.....	35
3.5.1. <i>Otpor čvrstog tijela kod optjecanja</i> .....	36
3.5.2. <i>Ovisnost faktora otpora o Reynoldsovoj značajci</i> .....	38
3.6. Strujanje u miješalici.....	40
3.6.1. <i>Oprema za miješanje</i> .....	41
3.6.2. <i>Snaga potrebna za miješanje</i> .....	42
3.7. Strujanje kroz porozni sloj .....	43
3.7.1. <i>Strujanje kroz uske pore</i> .....	45
3.7.2. <i>Strujanje kroz široke pore</i> .....	46

4. PRIJENOS TOPLINE.....	47
4.1. Kondukcija .....	49
4.1.1. <i>Stacionarna kondukcija topline kroz jednoslojni zid</i> .....	49
4.1.2. <i>Stacionarna kondukcija topline kroz višeslojni zid</i> .....	51
4.2. Konvekcija.....	53
4.2.1. <i>Utjecaj hidrodinamičkih uvjeta na vrijednost koeficijenta prijelaza topline</i> .....	55
4.2.2. <i>Načini određivanja koeficijenta prijenosa topline</i> .....	56
4.2.3. <i>Korelacijske jednadžbe pri prijenosu topline</i> .....	58
4.2.4. <i>Prolaz topline</i> .....	60
4.3. Izmjenjivači topline.....	63
4.3.1. <i>Podjela izmjenjivača</i> .....	63
4.3.2. <i>Proračun izmjenjivača topline</i> .....	66
4.3.3. <i>Izmjenjivači topline složene geometrije</i> .....	67
4.3.4. <i>Proračun izmjenjivača topline pomoću toplinskog stupnja djelovanja</i> .....	71
4.4. Zračenje.....	75
4.4.1. <i>Kako dolazi do zračenja?</i> .....	76
4.4.2. <i>Koncept fotona</i> .....	77
4.4.3. <i>Svojstva toplinskog zračenja</i> .....	77
4.4.4. <i>Zakoni koji opisuju toplinsko zračenje</i> .....	80
5. PRIJENOS TVARI .....	83
5.1. Molekularni mehanizam prijenosa tvari – difuzija.....	84
5.1.1. <i>Difuzijski koeficijent</i> .....	85
5.1.2. <i>Prijenos tvari difuzijom u stacionarnim uvjetima</i> .....	86
5.2. Prijenos tvari konvekcijom.....	90
5.2.1. <i>Difuzijski granični sloj</i> .....	90

## 1. UVOD

### 1.1. Fizikalne veličine

**Fizikalne** veličine – mjerljiva svojstva prirodnih pojava, procesa stanja, odnosno mjerljiva svojstva objekata kao njihovih nosilaca.

Svaka fizikalna veličina ima dva iskaza:

- ✓ kvantitativni i
- ✓ kvalitativni

**Istorodne veličine** mogu se izjednačavati.

OSNOVNE FIZIKALNE VELIČINE:

- ✓ duljina,  $l$
- ✓ masa,  $m$
- ✓ vrijeme,  $t$
- ✓ električna struja,  $I$
- ✓ termodinamička temperatura,  $T$
- ✓ svjetlosna jakost,  $I_v$
- ✓ množina ili količina tvari,  $n$

*Oznake veličina pišu se kurzivom, a jedinice veličina ne!*

IZVEDENE VELIČINE – izvode se iz već poznatih osnovnih veličina pomoću fizikalnih zakona ili definicijskih jednadžbi.

Njihov broj se mijenja s razvojem znanosti.

**Intenzivne veličine** - ako se bakreni štap podijeli na više dijelova, temperatura, toplinska i električna vodljivost svih dijelova štapa bit će iste.

**Ekstenzivne veličine** - ako se bakreni štap podijeli na više dijelova, duljina, obujam, masa razlikovat će se od prvobitnog.

**Specifične veličine** ispred naziva ekstenzivne fizikalne veličine ima značenje *podijeljeno s masom*.

**Molarne veličine** znače da je ekstenzivna fizikalna veličina *podijeljeno s množinom*.

**Bezdimenzijske veličine** ili simpleksi su skup izvedenih veličina koje nastaju kao omjer dviju istorodnih veličina – veličina im je jednaka broju (relativna gustoća, kut,  $l/d$ ,  $e/d$ ).

**Koeficijenti** - ako su dvije veličine proporcionalne a njihov odnos možemo pokazati ovisnošću:

$$A = k \cdot B$$

te ako  $A$  i  $B$  nisu istorodne,  $k$  nazivamo koeficijentom.

$D$  - koeficijent difuzije

Recipročna vrijednost koeficijenata – modul

**Faktori** - ako su dvije veličine proporcionalne a njihov odnos možemo pokazati ovisnošću:

$$A = k \cdot B$$

te ako su  $A$  i  $B$  istorodne,  $k$  nazivamo faktorom.

$\xi$ - faktor trenja

**Parametri** - kombinacije fizikalnih veličina koje se javljaju u jednadžbama smatraju se novim fizikalnim veličinama, nazivaju se parametrima.

Moguće im je pronaći fizikalni smisao ili značenje!

**Bezdimenzijske značajke** - brojčane kombinacije fizikalnih veličina koje se koriste pri opisu pojava (fenomena) prijenosa nazivaju se **bezdimenzijske značajke ili veličine**.

Reynoldsova značajka

**Procesni parametri** – veličine koje se ne mijenjaju tijekom provedbe procesa

**Procesne varijable** – veličine koje su promjenjive i mjere se tijekom provedbe procesa

## 1.2. Prijenosne pojave – osnova jediničnih operacija

Da bi se razumjele jedinične operacije potrebno je savladati znanja i zakonitosti prijenosnih pojava (količine gibanja, topline i tvari) te poznavati osnove kemijske kinetike i termodinamike.

**Prijenos količine gibanja** je dio koji se odnosi na prijenos količine gibanja do kojeg dolazi u fluidima koji se gibaju. Ova pojava osnova je **mehaničkih operacija** (npr. usitnjavanje, miješanje, sedimentacija, filtracija...).

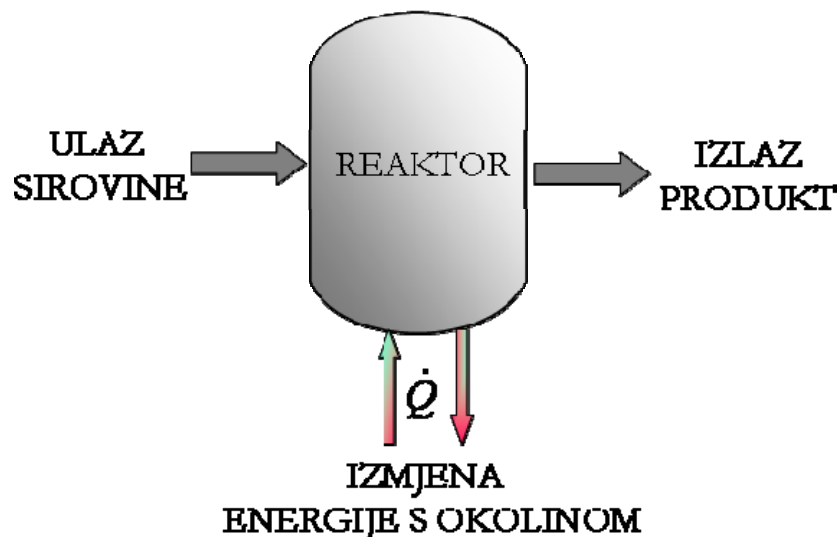
**Prijenos topline** – promatra se prijenos topline s jednog mjesta na drugo koji je osnova u **toplinskim operacijama** – zagrijavanje, sušenje, isparavanje, destilacija., kristalizacija...

**Prijenos tvari** – tvar se prenosi iz jedne faze u drugu. Osnovni mehanizam ostaje isti bez obzira da li se prenosi plin kapljevina ili čvrsto te su osnova **difuzijskim operacijama**: ekstrakcija, apsorpcija, ispiranje, sušenje, destilacija.

U većini jediničnih operacija odvijaju se sva tri prijenosa istodobno te je fizikalna slika promjena u sustavu složena.

### 1.3. Tehnološki proces

**Tehnološki proces** je niz promjena, odnosno način i redosljed izvršavanja radnih operacija. U tehnološkim procesima odvijaju se fizikalne i kemijske pretvorbe – od polazne sirovine do konačnog produkta uz izmjenu energije s okolinom.



Slika 1. Shematski prikaz reaktora

Sirovinu koja predstavlja ulaz u reaktor ili procesni prostor potrebno je prethodno pripremiti na adekvatan način (usitniti, homogenizirati, zagrijati ili ohladiti...). U reaktoru uz miješanje dolazi do kemijske reakcije, a produkt reakcije predstavlja izlazni produkt. Izlaskom iz reaktora, produkt

kreće u dodatne obrade. Tako je najčešće potrebno odijeliti izlazne struje (toplinski ili mehanički postupci). Dakle jediničnim (tehnološkim) operacijama pripremamo sirovinu ali i obrađujemo završni produkt.

Reaktor može biti različitih dimenzija od zrna katalizatora do destilacijskih kolona visokih par desetaka metara.

<http://chemistry.about.com/od/chemistrystudentfaqs/f/chemeng.htm>



**2. OSNOVNI POJMOVI**

U uvodnom dijelu objasnit će se osnovni pojmovi potrebni za razumijevanje i praćenje prijenosnih pojava u sustavu.

- ✓ **fizikalne osnove**
- ✓ **opći zakon očuvanja**
- ✓ **gustoća toka**
- ✓ **molekularni i vrtložni mehanizam procesa**
- ✓ **stacionarni i nestacionarni procesi**
- ✓ **reološka svojstva fluida**

## 2.1. Fizikalne osnove

Kako je u ovom kolegiju temelj većine pojava fluid u gibanju, potrebno je definirati fluid. **Fluid** ili **tekućina** je tvar koja se pod djelovanjem smičnog naprezanja, koliko god malenog, neprekidno deformira.

*Smično naprezanje* se definira kao odnos sile trenja koja se javlja pri gibanju fluida uz nepokretnu površinu i površine s kojom je fluid koji struji u kontaktu.

$$\tau = \frac{F_{tr}}{S}$$

Gdje je:

$S$  – nepokretna površina u kontaktu s fluidom koji se giba

$F_{tr}$  – sila trenja koja se pri tom javlja

$\tau$  – smično naprezanje

Ukoliko je fluid u stanju mirovanja, ne postoje smična naprezanja.

*Neprekidna deformacija*, o kojoj se govori u definiciji fluida, pojava je koja se naziva strujanje fluida.

Pod djelovanjem tlačnog naprezanja fluidi se ponašaju kao i čvrsto tijelo - svaka promjena tlaka uzrokuje određenu promjenu volumena:

Ukoliko je promjena volumena neznatna -  $\Delta V$ , dolazi do formiranja slobodne površine, radi se o nestlačivim fluidima, *kapljevina*

Ukoliko je promjena volumena velika -  $\Delta V$ , dolazi do neograničenog širenja u prostoru, radi se o stlačivim fluidima, *plin*

**Gustoća** je masa po jedinici volumena, a za idealan fluid koji je nestlačiv je konstantna.

$$\rho = \frac{m}{V} \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$$

## 2.2. Newton-ov zakon viskoznosti

Pojam viskoznosti prvi je uveo **Newton**.

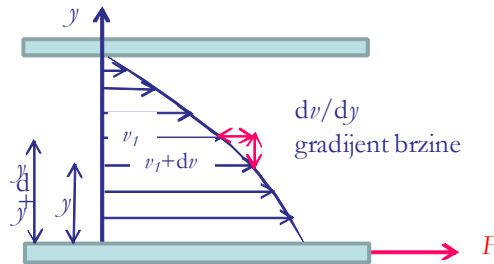
*Viskoznost* ili *unutrašnje trenje* je posljedica prijenosa količine gibanja između slojeva fluida u gibanju, odnosno svojstvo otpornosti fluida prema smičnoj deformaciji.

✓ Dinamička,  $\eta$  /Pa s

✓ Kinematička,  $\nu / \text{m}^2 \text{s}^{-1}$

Gibanje fluida zamišljeno je kao gibanje zamišljenih slojeva (ploha) fluida koji se kreću paralelno, ali različitim brzinama.

Između dvije paralelne ploče nalazi se fluid od kojih jedna ploča miruje, a druga se giba brzinom  $v$  uslijed djelovanja sile  $F$ . Sila  $F$  proizvodi smično napreazanje koje se generira na fluid između ploča.



Slika 2. Newtonov zakon viskoznosti

Sila  $F$  proporcionalna je površini koja je u dodiru s fluidom, gradijentom brzine i koeficijentu proporcionalnosti.

$$F = \eta \cdot S \cdot \frac{dv}{dy} \text{ ili } F_{tr} = -\eta \cdot S \cdot \frac{dv}{dy}$$

Dijeljenjem s površinom dobije se izraz za smično napreazanje:

$$\frac{F}{S} = \tau = \eta \cdot \frac{dv}{dy}$$

Gdje je:

$$\frac{dv}{dy} \text{ - gradijent brzine}$$

$F$  – sila koja uzrokuje gibanje, N

$F_{tr}$  – sila koja se opire gibanju, N

$\tau$  – smično napreazanje, Pa

$\eta$  – dinamička viskoznost (koeficijent viskoznosti),

$$\eta = \tau \cdot \frac{dy}{dv} \left[ \text{Pa} \cdot \frac{\text{m}}{\text{m} \cdot \text{s}} \right] = [\text{Pa} \cdot \text{s}]$$

$$\frac{dv}{dy} = \dot{\gamma} \text{ - gradijent brzine (smično napreazanje), } \text{s}^{-1}$$

Umjesto dinamičke viskoznosti u Newtonov zakon viskoznosti može se uvrstiti kinematička viskoznost:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

$\nu$ - kinematička viskoznost,  $m^2 \cdot s^{-1}$

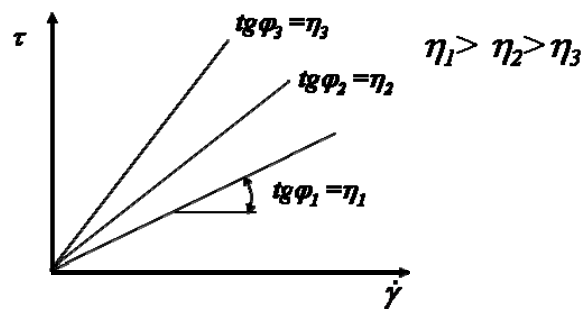
$$\nu \left[ \frac{m^2}{s} \right] = \left[ \frac{Pa \cdot s \cdot m^3}{kg} \right] = \left[ \frac{kg \cdot m \cdot s \cdot m^3}{s^2 \cdot m^2 \cdot kg} \right] = \left[ \frac{m^2}{s} \right]$$

dobiva se izraz za smično naprezanje:

$$\tau = \nu \cdot \frac{d(v \cdot \rho)}{dy}$$

Gdje je:

$v \cdot \rho$  ili  $\frac{m \cdot v}{V}$  - količina gibanja po jedinici volumena .



Slika 3. Grafički prikaz ovisnosti smičnog naprezanja o smičnoj brzini za Newtonovske fluide

Uređajima koji se zovu *reometri*, mjeri se ovisnost smičnog naprezanja o smičnoj brzini, ta ovisnost definira svojstvo fluida koja se naziva viskoznost,  $\eta$ .

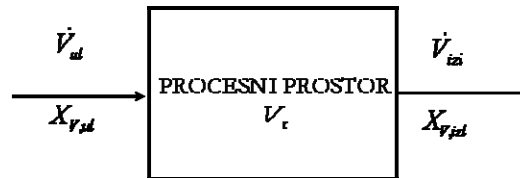
$\eta$  - koeficijent smjera pravca iz kojeg se određuje vrijednost viskoznosti fluida.

Ukoliko je ovisnost smičnog naprezanja o smičnoj viskoznosti *linearna*, fluid se ponaša po Newtonovom zakonu viskoznosti, kažemo da je fluid *newtonovski*.

### 2.3. Opći zakon očuvanja

Za različita djelovanja u prirodi, uvodi se naziv **proces**, a prostor u kojem se djelovanja odvijaju naziva se **procesni prostor**. Promatranjem procesnog prostora (ograničeni dio prostora u okolini) uočava se protok određene količine gibanja, tvari ili energije.

Dakle reaktor možemo promatrati kao procesni prostor, u procesni prostor ulaze ulazne struje, unutar procesnog prostora dolazi do generacije, a okolini se iz procesnog prostora predaje proizvod djelovanja.



Slika 4. Opći zakon očuvanja – kontrolni volumen

$V_r$  - kontrolni volumen ili procesni prostor omeđeni dio prostora kroz koji tijekom vremena protječe neka količina gibanja, tvari ili topline

$\dot{V}$  - volumni protok na ulazu ili izlazu,  $m^3 s^{-1}$

$X_v$  - količina gibanja, tvari ili energije po jedinici volumena

✓ količina gibanja  $X_v = \frac{m \cdot v}{V} = \rho \cdot v$

✓ toplinska energija  $X_v = \frac{Q}{V}$

✓ prijenos tvari  $X_v = \frac{m}{V}$

$V_r$  – količina generirane veličine  $X$  u procesnom prostoru (nastajanje ili nestajanje),

Procesni prostor određuje:

- ✓ geometrijski oblik,
- ✓ ovisnost procesnih varijabli o vremenu i prostoru,
- ✓ vrsta procesa koja se odvija unutar njega,
- ✓ prolaz i prijenos količine gibanja, energije ili tvari.

Opći zakon očuvanja u ovom slučaju promatra se s makroskopskog stanovišta:

$$V \cdot \frac{dX_v}{dt} = \dot{V}_{ul} \cdot X_{v,ul} - \dot{V}_{izl} \cdot X_{v,izl} + V_r$$

AKUMULACIJA=ULAZ-IZLAZ+GENERACIJA

*Akumulacija količine u nekom procesnom prostoru jednaka je volumnom protoku količine koja je ušla u sustav, umanjena za volumni protok količine koja je izašla iz sustava i uvećana (umanjena) za generiranu količinu u sustavu.*

Fizikalno značenje produkta  $\dot{V} \cdot X_v$ :

$$\dot{V} \cdot X_v = \frac{m^3}{s} \cdot \frac{X}{m^3} = \frac{X}{s}$$

Produkt  $\dot{V} \cdot X$  predstavlja brzinu procesa i naziva se tok (maseni tok, toplinski tok).

Volumni protok (tok) volumen tekućine koja protiče kroz presjek u jedinici vremena.

$$\dot{V} = \frac{V}{t} \left[ \frac{m^3}{s} \right]$$

Maseni protok (tok) masa tekućine koja protiče kroz presjek u jedinici vremena.

$$\dot{m} = \frac{m}{t} \left[ \frac{kg}{s} \right]$$

Toplinski protok (tok)

$$\dot{Q} = \frac{Q}{t} \left[ \frac{J}{s} \right]$$

## 2.4. Gustoća toka ili fluks

**Gustoća toka ili fluks** definira se kao brzina procesa prijenosa (protok) po jediničnoj površini:

Opća definicija gustoće toka (ili *fluksa*) je:

$$\text{Flux} = \frac{\text{kolicina protoka}}{(\text{vrijeme})(\text{površina})}$$

- ✓ gustoća toka KOLIČINE GIBANJA
- ✓ gustoća toka TVARI
- ✓ gustoća toka TOPLINE

Do prijenosnih pojava, odnosno prijenosa količine gibanja, energije ili prijenosa tvari dolazi zbog narušavanja ravnoteže odnosno ukoliko postoji pokretačka sila procesa.

Dakle, opći oblik za gustoću toka može se izraziti i kao odnos pokretačke sile,  $\Delta$  (povezana je s gradijentom karakterističnim za sustav) i otpora,  $y$ .

$$\phi = \kappa \cdot \frac{\Delta}{y} = \text{transportni koeficijent} \cdot \text{gradijent}$$

$\kappa$  je koeficijent prijenosa ili proporcionalnosti.

## 2.5. Koeficijenti pri prijenosnim pojavama

Na procese prijenosa (količine gibanja, topline i tvari) osim pokretačke sile i otpora, utjecat će i svojstva sustava koja se izražavaju transportnim koeficijentima. Viskoznost kod prijenosa količine gibanja, toplinska vodljivost kod prijenosa topline i difuzijski koeficijent pri prijenosu tvari. Koeficijenti proporcionalnosti se vrlo često određuje eksperimentalno, navedeni su u različitim literaturama, tabelirani za pojedine tvari. Koeficijenti prijenosa ovise o mediju u kojem se

promatra proces prijenosa ali i o temperaturi i tlaku u sustavu. Na transportne koeficijente utječe i mehanizam prijenosa.

### 2.6. Mehanizmi prijenosa

Proučavanjem prijenosnih pojava promatraju se fluidi u gibanju ili rjeđe ili fluidi u mirovanju, odnosno čvrsta tijela. Ovisno brzini fluida u sustavu ovisit će mehanizam prijenosa.

Razlikuje se **molekularni mehanizam** kod mirovanja ili malih brzina fluida odnosno prijenos topline u čvrstim tijelima. Ovaj prijenos karakterizira spori i slojeviti prijenos u smjeru pokretačke sile s molekule na molekulu. Pri ovakvom prijenosu ne dolazi do miješanja između slojeva.

**Tablica 1.** tabelirani prikaz značenja fizikalnih veličina u izrazu za gustoću toka pri molekularnom mehanizmu prijenosa.

$\phi = \kappa \cdot \frac{\Delta}{y}$	prijenos količine gibanja	prijenos topline	prijenos tvari
Gustoća toka $\Phi$	$\tau = -\nu \cdot \frac{d(v \cdot \rho)}{dy}$ NEWTON	$\dot{Q} = -a \cdot \frac{d(\rho \cdot c_p \cdot T)}{dy}$ FOURIER	$n = -D \cdot \frac{dy}{dy}$ FICK
Koeficijent prijenosa $\kappa$	kinematička difuzivnost $\nu$	temperaturna difuzivnost $a$	masena difuzivnost $D$
Pokretačka sila procesa $\Delta$	razlika količine gibanja	razlika sadržaja topline	razlika masene koncentracije

Vrlo često prijenosne pojave promatraju se u fluidima koji se gibanju velikim brzinama strujanja. Tada je gibanje grupa molekula najčešće uzrokovano vanjskom silom (miješanje, velika razlika tlakova). Zbog povećane pokretačke sile, povećava se energija u sustavu, dolazi do miješanja među slojevima i pojave vrtloženja – **vrtložni mehanizam** prijenosa. Kod vrtložnog mehanizma vrijednosti gustoće toka su mnogo veće jer su ili pokretačka sila ili koeficijent prijenosa ili obje vrijednosti mnogo veće.

Kako je već spomenuto, transportni koeficijenti ovise o mehanizmu prijenosa te se u slučaju vrtložnog mehanizma javljaju teškoće kod određivanja. Naime, pri vrtložnom gibanju fluida u

transportni koeficijent ugrađuje se otpor prijenosu ( $y$ ) te tako izražen koeficijent ovisi o hidrodinamici u sustavu.

$$\kappa' = \frac{\kappa}{y}$$

Kasnije će biti govora o razlozima otežanog definiranja otpora pri vrtložnom mehanizmu prijenosa.

**Tablica 2.** tabelirani prikaz značenja fizikalnih veličina u izrazu za gustoću toka pri turbulentnom mehanizmu prijenosa.

$\phi = \kappa' \cdot \Delta$	prijenos količine gibanja	prijenos topline	prijenos tvari
Gustoća toka $\Phi$	$\tau = f \cdot \frac{v^2 \cdot \rho - v_s^2 \cdot \rho}{2}$	$q = \alpha \cdot (T - T_s)$	$\dot{m}_A = k \cdot (\gamma - \gamma_s)$
Koeficijent prijenosa $\kappa/y$	koeficijent proporcionalnosti $f$	koeficijent prolaza topline $\alpha$	koeficijent prijenosa tvari $k$
Pokretačka sila procesa $\Delta$	kin. energija po jed. vol.	razlika sadržaja topline	razlika masene koncentracije

Kada se govori o mehanizmima prijenosa, treba poznavati nazive koji se koriste pri različitim prijenosima: količine gibanja, topline ili tvari.

**Tablica 3.** Nazivi mehanizama prijenosa

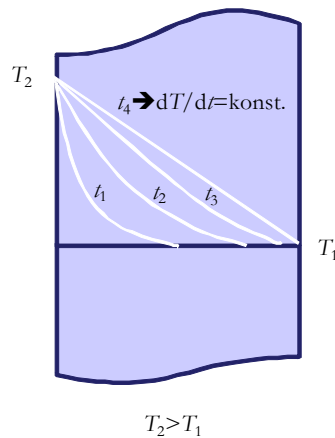
PRIJENOS	MOLEKULARNI	VRTLOŽNI
Količine gibanja	laminarno strujanje	turbulentno strujanje
Topline	kondukcija	konvekcija
Tvari	difuzija	konvekcija

### 2.7. Stacionarni i nestacionarni procesi

U prirodi dolazi do promjena pod utjecajem neke pokretačke sile, odnosno može se reći da se tok uspostavlja zbog postojanja gradijenta. Npr. do toka toplinske energije doći će ukoliko postoji



razlika temperatura na različitim krajevima nekog promatranog prostora ili sustava. Promotrimo prijenos topline u ploči prikazanoj na slijedećoj slici.



Slika 5. Razvoj temperaturnog profila u ploči od stacionarnog do nestacionarnog stanja.

Temperatura ploče,  $T_1$  u vremenu  $t=0$  je konstantna. Ako se jednoj strani ploče poveća temperatura na  $T_2$ , uspostavit će se tok topline od mjesta više prema nižoj temperaturi. Može se uočiti da će se temperaturni profil kroz ploču mijenjati do postizanja linearne promjene temperaturnog profila. Kaže se da se uspostavilo stacionarno stanje, tj. temperaturni gradijent se ne mijenja s vremenom.

PODSJETIMO SE!

Proces je stacionaran ukoliko je brzina procesa stalna  $\frac{dX_V}{dt} = 0$

Proces je nestacionaran ako se brzina procesa mijenja s vremenom  $\frac{dX_V}{dt} \neq 0$

## 2.8. Reološki dijagrami

Prema funkcionalnoj vezi  $\tau$  i  $\dot{\gamma}$ , razlikuju se **newtonski i nenevtonski fluidi**. Kako je prije objašnjeno kod newtonskih fluida, ovisnost smičnog naprezanja o smičnoj brzini je linearna, a grafički prikaz je pravac. Fluid se ponaša prema newtonovom zakonu viskoznosti, a viskoznost fluida je stalna ( $\eta = \text{konst.}$ ) bez obzira na promjenu smične brzine,  $\dot{\gamma}$

Fluidi koji se ne ponašaju po newtonovom zakonu viskoznosti nazivaju se **nenevtonski** fluidi, a viskoznost ovisi o smičnoj brzini. Zbog toga se umjesto izraza viskoznost koristi: **smična viskoznost** ili **prividna viskoznost** ili **smično zavisna viskoznost** (*shear dependent viscosity*)

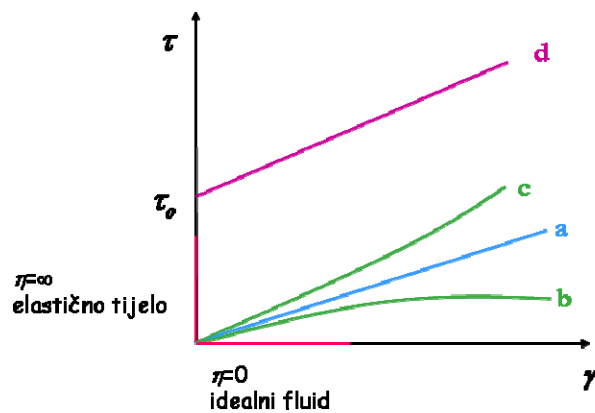
$$\eta = f\left(\frac{dv}{dy}\right), \text{ odnosno } \eta = f(\dot{\gamma})$$

Ovisnost viskoznosti o smičnoj brzini potrebo je ispitati budući da ona kod velikog broja fluida nije konstantna. Ova ovisnost može se odrediti *reometrom*. Prikaz ovisnosti smičnog naprezanja o smičnoj brzini, naziva se *reološki dijagram*.

Reološka svojstva fluida izražavaju se osim reološkim dijagramom i *fenomenološkim jednadžbama* koje sadržavaju *reološke parametre*.

### Nenjutnovski fluidi

Na slici su prikazane ovisnosti smičnog naprezanja o smičnoj brzini.



Slika 6 Reološki dijagram

Ukoliko je smično naprezanje 0, bez obzira na promjenu smične brzine, fluid je **idealni** odnosno neviskozni,  $\eta=0$

Kada je viskoznost beskonačna, govorimo o **elastičnom tijelu**,  $\eta=\infty$ . Naprezanje je proporcionalno veličini deformacije, dok smična brzina ne ovisi o naprezanju.

Na slici su, osim ovisnosti prikazanoj pravcem a koja definira ponašanje newtonskog fluida, prikazani nenewtonovski fluidi:

Krivulje b i c prikazuju ovisnost smičnog naprezanja o smičnoj brzini za Ostwald de Walle-ovi fluide čije je ponašanje opisano potencijalnim modelom:

$$\tau = K \cdot \dot{\gamma}^n$$

Gdje je:

K - indeks konzistencije

n - indeks ponašanja toka

Za  $n < 1 \rightarrow \eta_a$  opada s porastom  $\rightarrow$  pseudoplastični fluid  $\rightarrow$  emulzije, smole

Za  $n > 1 \rightarrow \eta_a$  raste s porastom  $\rightarrow$  dilatantni fluid  $\rightarrow$  uljene boje, tiskarsko crnilo

Funkcija  $d$  prikazuje Binghamove fluide, čije ponašanje definira ovisnost:

$$\tau = \tau_0 + \eta \cdot \dot{\gamma}^n$$

Gdje je:

$\tau_0$  – granica tečenja, Pa

Ovo su plastične tvari, koje se počinju ponašati kao fluidi tek nakon postignute granice tečenja. U toj skupini su: masti za podmazivanje, mulj otpadnih voda, glinene suspenzije...

### 3. PRIJENOS KOLIČINE GIBANJA

Prijenos količine gibanja promatrat će se kroz 4 slučaja:

✓ Protjecanje, općenito strujanje fluida između čvrstih površina različitih geometrijskih karakteristika. Fluid protječe kroz cijev ili kanal pod djelovanjem razlika tlakova.

Do protjecanja fluida kroz cijev dolazi zbog razlike tlakova, a otpor protjecanju se javlja zbog viskoznosti fluida i trenja uz stjenku i unutar samog fluida.

✓ Optjecanje - ili taloženje čestica u suspenziji događa se zbog djelovanja sile teže, a otpor pruža fluid (pri većim gustoćama i viskoznostima javljaju se i veći otpori).

✓ Strujanje kroz poroznu sredinu – uslijed djelovanja pokretačke sile (gravitacijska, vakuum, centrifugalna sila) kapljevina prolazi kroz sloj čestica (talog) i porozno platno (filar) koji pružaju otpor strujanju.

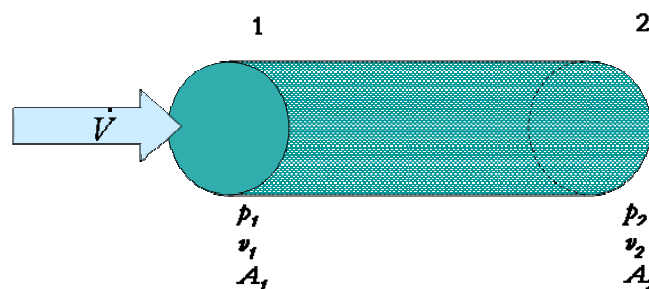
✓ Strujanje u miješalici - kod miješanja otpor miješanju pruža suspenzija, odnosno fluid i prisutne čvrste čestice.

#### 3.1. Zakoni očuvanja

##### 3.1.1. Zakon očuvanja mase – jednadžba kontinuiteta

**Jednadžba kontinuiteta** – opisuje stacionarno strujanje fluida na temelju zakona o očuvanju mase u struji fluida te povezuje brzine strujanja fluida s presjecima kroz koje struji fluid.

Unutar cijevi koja predstavlja procesni prostor promatra se nestlačivi fluid u izotermnom gibanju (od točke 1 do 2), određenog volumnog protoka.



Slika 7. Zakon očuvanja mase

Polazeći od općeg zakona očuvanja jednadžba (?)

$$V \cdot \frac{dX_v}{dt} = \dot{V}_{ul} \cdot X_{v,ul} - \dot{V}_{izl} \cdot X_{v,izl} + V_r$$

na makroskopskoj razini masu tijela definiramo pomoću gustoće, odnosno u jednadžbi (?)  $X_v$  je masa jediničnog volumena što predstavlja gustoću:

$$X_v = \frac{m}{V} = \rho$$

Dolazi se do izraza za opći zakon očuvanja mase ili kontinuiteta:

$$V \frac{d\rho}{dt} = \dot{V}_{ul} \cdot \rho_{ul} - \dot{V}_{izl} \cdot \rho_{izl} + V_r$$

Pri stacionarnim uvjetima vrijedi:  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ , akumulacija je 0, kao i generacija unutar procesnog prostora, 0,  $V_r = 0$ .

Dakle, maseni protok na ulazu jednak je masenom protoku fluida na izlazu:

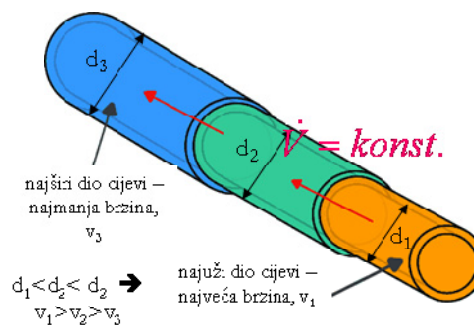
$$\dot{V}_{ul} \cdot \rho_{ul} = \dot{V}_{izl} \cdot \rho_{izl} \rightarrow \dot{m}_{ul} = \dot{m}_{izl}$$

Uz konstantnu temperaturu,  $T = \text{konst.}$  gustoća fluida se ne mijenja od ulaza do izlaza.

$\rho_1 = \rho_2 = \text{konst.}$ , odnosno:

$$\dot{V}_{ul} = \dot{V}_{izl}$$

Kako je:  $\dot{V} = v_1 \cdot A_1$ , za izotermno strujanje nekompresibilnih fluida vrijedi:



Slika 8. Održanje volumnog protoka konstantnim kroz različite profile cijevi

$$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 = \dots = v_i \cdot A_i$$

Ovaj izraz predstavlja zakon kontinuiteta:

*Kroz različite presjeka u zatvorenom cjelovitom sustavu, protječe ista masa fluida ali različitim brzinama.*

### 3.1.2. Zakon očuvanja količine gibanja (II Newtonov zakon gibanja)

Promatra se količina gibanja izražena po volumenu procesnog prostora:

$$X_V = \frac{m \cdot v}{V} = \rho \cdot v$$

Opći zakon očuvanja sada pišemo u sljedećem obliku:

$$V \cdot \frac{d(v\rho)}{dt} = \dot{V}_{ul.} \cdot (v\rho)_{ul.} - \dot{V}_{izl.} \cdot (v\rho)_{izl.} + V_r$$

Budući da kod stacionarnih procesa nema promjene količine gibanja s vremenom  $\left(\frac{d(v\rho)}{dt} = 0\right)$  i

uz uvjet da nema generacije ( $V_r = 0$ ) iz jednadžbe slijedi:

$$\dot{V}_{ul.} \cdot (v\rho)_{ul.} = \dot{V}_{izl.} \cdot (v\rho)_{izl.} = 0$$

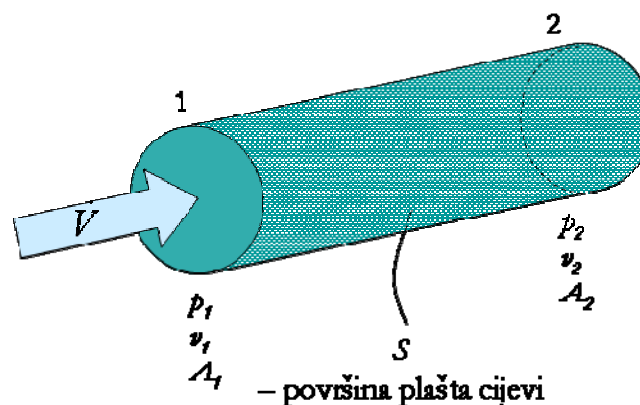
Može se pokazati da produkt  $\dot{V} \cdot (v\rho)$  predstavlja silu:

$$\dot{V} \cdot (v\rho) = \frac{V}{t} \cdot \frac{v \cdot m}{V} = \frac{v \cdot m}{t} = F$$

Iz čega slijedi da se zakon očuvanja količine gibanja može izraziti na sljedeći način:

$$\sum_{i=0}^N F_i = 0$$

zbroj svih sila u sustavu iznosi 0.



Slika 9. Zakon očuvanja količine gibanja

Karakteristične sile koje se javljaju u sustavu za vrijeme gibanja fluida su sila tlaka koja uzrokuje gibanje, odnosno sila trenja koja mu se opire.:

$$F_{p1} = F_{p2} + F_{tr.}$$

$$p_1 \cdot A_1 = p_2 \cdot A_2 + \tau \cdot S$$

Sređivanjem gornje jednadžbe dobiva se:

$$\Delta p \cdot A = \tau \cdot S$$

gdje

$(\Delta p \cdot A)$  predstavlja silu tlaka koja uzrokuje gibanje fluida brzinom  $v$ , a

$(\tau \cdot S)$  je sila trenja koja je umnožak smičnog naprezanja,  $\tau$  nastalog u kontaktu fluida koji se giba s plaštom cijevi i površine plašta,  $S$ .

*Zbog svojstva viskoznosti fluida dolazi do prenošenja dijela količine gibanja na nepokretnu površinu te dolazi do pada tlaka u smjeru gibanja fluida.*

### 3.1.3. Zakon očuvanja energije (I zakon termodinamike)

Energija nekog fluida definirana je zbrojem niza komponenti

$$E_V = p + \rho \cdot c_p \cdot (T - T_r) + \sum \Delta H + \frac{1}{2} \cdot v^2 \cdot \rho + \rho \cdot g \cdot z$$

koje predstavljaju:

$p$  - tlačna energija

$\rho \cdot c_p \cdot (T - T_r)$  - sadržaj topline fluida

$\sum \Delta H$  - promjena agregatnog stanja fluida

$\frac{1}{2} \cdot v^2 \cdot \rho$  - kinetička energija po jediničnom volumenu

$\rho \cdot g \cdot z$  - potencijalna energija po jediničnom volumenu

Uvrštenjem izraza za energiju fluida u opći zakon očuvanja:  $X_V = E_V$ , dobiva se izraz:

$$V \cdot \frac{dE_V}{dt} = \dot{V}_{ul} \cdot E_{V,ul} - \dot{V}_{iz} \cdot E_{V,iz} + W' - Q'$$

$W_V'$  - dio dovedenog mehaničkog rada koji se pretvara u toplinu,  $J \text{ m}^{-3}$

$Q_V'$  - odvedena toplina,  $J \text{ m}^{-3}$

U hidrodinamičkom sustavu vrijedi:  $W_V' = Q_V'$

Rad u stacionarnim uvjetima znači da nema promjene energije s vremenom:

$$\frac{dE_V}{dt} = 0$$

Uvažavajući zakon očuvanja mase, može se smatrati volumni protok u sustavu konstantan:

$$\dot{V}_{ul} = \dot{V}_{izl.}$$

Kod izoternog strujanja, temperatura se ne mijenja od ulaza do izlaza:

$T_{ul} = T_{izl.}$ , a uz konstantnu temperaturu u sustavu, ne mijenja se ni gustoća  $\rho_{ul} = \rho_{izl.}$ , dakle

sadržaj topline u sustavu je konstantan:

$$(\rho \cdot c_p \cdot T)_{ul.} = (\rho \cdot c_p \cdot T)_{izl.}$$

Pretpostavlja se da ne dolazi do promjene agregatnog stanja u sustavu:  $\sum \Delta H_V = 0$

Dakle energija u sustavu je konstantna i rezultat je zbroja: potencijalne, tlačne i kinetičke energije fluida:

$$E_V = \rho \cdot g \cdot z + p + \frac{v^2 \cdot \rho}{2}$$

Primjenom zakona očuvanja energije za neviskozni fluid vrijedi:

$$E_{V,ul.} = E_{V,izl.} \text{ odnosno } \left( \rho \cdot g \cdot z + p + \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \right)_{ul.} = \left( \rho \cdot g \cdot z + p + \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \right)_{izl.}$$

### Bernoulli-jeva jednadžba za idealni fluid

$$\rho \cdot g \cdot z + p + \frac{v^2 \cdot \rho}{2} = konst.$$

U zatvorenom, izoliranom hidrauličkom sustavu, zbroj svih mehaničkih energija je stalan.

### Strujanje realnih (viskoznih fluida)

Zbog viskoznosti fluida, u smjeru strujanja fluida dolazi do gubitka energije koji se očituje padom tlaka.

$$\rho_1 \cdot g \cdot z_1 + p_1 + \frac{v_1^2 \cdot \rho}{2} = \rho_2 \cdot g \cdot z_2 + p_2 + \frac{v_2^2 \cdot \rho}{2} + V_r \quad [Jm^{-3}] [Pa]$$

$V_r$  – generacijski član koji predstavlja gubitak energije

$$V_r = E_{gub.} = \rho \cdot g \cdot h_w$$

Bernoullieva jednadžba može se izraziti za 1 kg fluida u gibanju:

$$z_1 \cdot g + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = z_2 \cdot g + \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + h_w \cdot g \quad [Jkg^{-1}]$$

Članovi Bernoullieve jednadžbe mogu se izraziti u metrima:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + h_w \quad [m]$$

$z$                       geometrijska (geodetska) visina

$\frac{p}{\rho \cdot g}$                       tlačna visina

$\frac{v^2}{2 \cdot g}$                       brzinska visina



$$\frac{\Delta p}{\rho \cdot g} = h_w \quad \text{gubitak energije trenjem}$$

### 3.2. Vrste strujanja

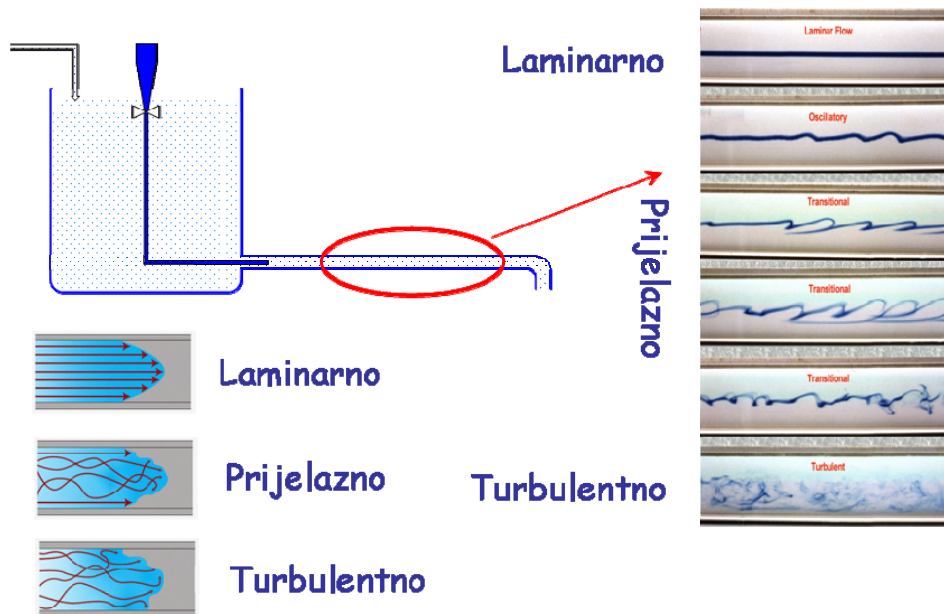
#### 3.2.1. Reynoldsov eksperiment

Osborn Reynolds je krajem 19. stoljeća proučavao pojave pri strujanju. Jednim od njegovih eksperimenata pokazao je da mehanizam strujanja fluida ne ovisi samo o brzini, nego i o karakteristikama fluida te geometrijskim karakteristikama sustava. Iz spremnika u kojem se održava konstantna razina kapljevine, istječe voda u ravnu cijev. Na ulazu u cijev ugrađena je u sredini tanka kapilara kroz koju se pušta tanku mlaz obojene kapljevine.

Kod vrlo malih brzina uočeno je da se obojena kapljevina ne miješa između slojeva, već da struji u sredini toka u obliku niti pa se zaključuje da se čestice fluida gibaju pravocrtno i da nema miješanja između slojeva. Ovakvo strujanje naziva se **slojevito** ili **laminarno strujanje**.

Povećanjem brzine strujanja dolazi do djelomičnog remećenja slojevitog strujanja te dolazi do djelomičnog obojena tekućine koja struji u obliku krivudave linije. Takvo stanje strujanja naziva se **prijelazno područje**.

Povećanjem brzine strujanja, cijev je u potpunosti obojena plavom bojom što ukazuje na potpuno miješanje slojeva. Zbog većih brzina strujanja došlo je do miješanja između slojeva i vrtloženje, ovakvo se gibanje naziva **vrtložno** ili **turbulentno strujanje**.



Slika 10. Reynoldsov eksperiment

Reynolds je uočio dvije osnovne sile koje su prisutne pri protjecanju:

sila inercije i sila trenja.

Odnos sile inercije i sile trenja predstavlja kriterij koji uzima u obzir sve veličine koje utječu na mehanizam prijenosa količine gibanja, te se na temelju njega definira vrsta strujanja odnosno

**Reynoldsova značajka.:**

$$\frac{F_i}{F_{tr}} = \frac{m \cdot a}{\tau \cdot S} = \frac{(\rho \cdot \ell^3) \cdot \frac{v^2}{\ell}}{\eta \cdot \frac{v}{\ell} \cdot \ell^2} = \frac{v \cdot \ell \cdot \rho}{\eta}$$

Eksperimentalno je utvrđeno da kritična vrijednost **Reynoldsovog broja** koja predstavlja granicu između laminarnog i prijelaznog područja pri strujanju kroz glatku cijev iznosi  $Re_{kr}=2320$ . Ovisno o geometriji sustava vrijednost kritičnog Reynoldsovog broja se mijenja.

Ukoliko je  $Re$  značajka mali broj – sila inercije,  $F_i$  manja je od sile trenja,  $F_{tr}$ , može se reći da prevladavaju viskozni efekti.

Ukoliko je  $Re$  značajka veliki broj, sila trenja  $F_{tr}$  bit će manja od sile inercije,  $F_i$  te je utjecaj viskoznosti zanemariv.

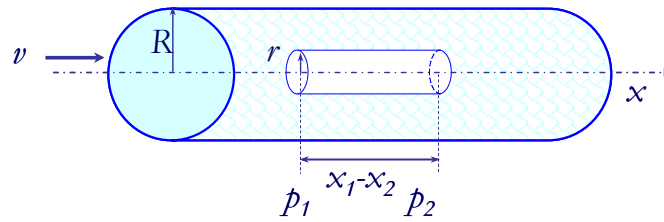
### 3.2.2. Laminarno strujanje

Laminarno strujanje je slojevito strujanje (nema miješanja između slojeva). Prijenos količine gibanja uzrokovan je isključivo površinskim trenjem.

Količina gibanja se prenosi s fluida na nepokretnu površinu molekularnim mehanizmom zbog toga dolazi do gubitak energije koji se očituje padom tlaka u smjeru strujanja fluida.

#### 3.2.2.1. Raspodjela brzina pri laminarnom stacionarnom strujanju u horizontalnoj cijevi

U stvarnosti zbog viskoznosti i s njome povezanoga otpora strujanju, u blizini rubova toka uvijek postoji raspodjela brzina. Kod te raspodjele je brzina na granici fluida i okolnog (krutoga) sredstva uvijek 0, a prema sredini toka raste. Brzine laminarnog toka u cijevi imaju oblik parabole. Stoga je kod analize laminarnog gibanja važno je utvrditi kakva je raspodjela brzina (raspodjela nije ista za različite prostore, okrugla cijev, koncentrične cijevi, između ploča...).



Slika 11. Shema cijevi za izvod raspodjele brzina laminarnog strujanja u cijevi

Ukoliko kroz horizontalnu cijev struji kapljevinu stacionarnim tokom od presjeka 1 do presjeka 2 može se definirati brzina:

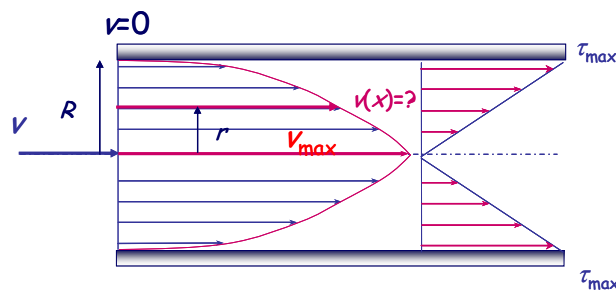
- ✓ u sredini cijevi,  $r = 0$ , gdje je smično naprezanje minimalno i iznosi  $\tau = 0$ , a brzina je maksimalna  $v_{\max}$ .

$$v_{\max} = -\frac{1}{4 \cdot \eta} \cdot \left(-\frac{dp}{dx}\right) \cdot R^2$$

- ✓ uz nepokretnu površinu,  $r = R$ , gdje je smično naprezanje maksimalno  $\tau_{\max}$ , a brzina je 0,  $v = 0$

- ✓ također je moguće definirati izraz za brzina u cijevi na nekoj udaljenosti  $r$ :

$$v_x(r) = -\frac{1}{4\eta} \cdot \left(-\frac{dp}{dx}\right) \cdot (R^2 - r^2)$$



Slika 12. Vektorski prikaz brzina i smičnog naprezanja u ovisnosti o položaju cijevi

Na određenom položaju u cijevi, brzina fluida jednaka je prosječnoj brzini strujanja u cijevi, izraz za vrijednost srednje brzine u cijevi iznosi:

$$v_{sr} = \frac{1}{8\eta} \cdot \left(-\frac{dp}{dx}\right) \cdot R^2$$

Odnos srednje i maksimalne vrijednost brzine fluida u cijevi ima praktično značenje jer postavljanjem mjernog instrumenta u sredinu cijevi očitava se maksimalna vrijednost brzine fluida, dok se u proračun (npr. pad tlak u sustavu, snaga pumpe) uzima vrijednost srednje brzine fluida.

Odnos srednje i maksimalne vrijednost brzine fluida u cijevi je:  $\frac{v_{\max}}{v_{\text{sr}}} = 2$ .

### 3.2.2.2. Gubitak energije pri laminarnom strujanju u horizontalnoj cijevi

Pri strujanju viskoznog fluida dolazi do nepovratnog gubitka energije, koji se izražava padom tlaka. Hagen i Poiseuille izveli su izraz kojim se može izračunati pad tlaka u **laminarnom području**.

Preuređenjem izraza za srednju brzinu strujanja u cijevi:

$$v_{\text{sr}} = \frac{1}{8\eta} \cdot \left( -\frac{dp}{dx} \right) \cdot R^2 \rightarrow -\int_{p_1}^{p_2} dp = \frac{8 \cdot \eta \cdot v_{\text{sr}}}{R^2} \cdot \int_{x_1}^{x_2} dx$$

te integriranjem na određenoj duljini cijevi:

$$\underbrace{p_1 - p_2}_{\Delta p} = \frac{8 \cdot \eta \cdot v_{\text{sr}}}{R^2} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{\ell}$$

dobiva se Hagen-Poiseuillova jednadžba koja vrijedi isključivo za laminarno područje:

$$\Delta p = \frac{32 \cdot \eta \cdot l \cdot v_{\text{sr}}}{d^2}$$

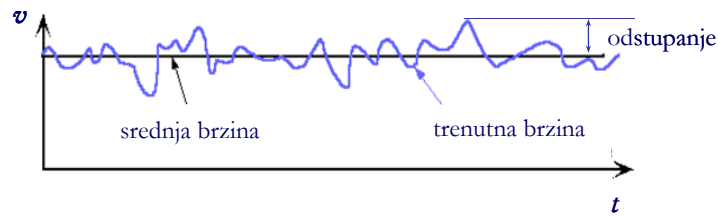
Iz ove jednadžbe vidljivo je da je utjecaj viskoznosti prisutan kroz cijeli presjek cijevi. Dakle, pri laminarnom strujanju količina gibanja prenosi samo molekularnim mehanizmom, odnosno da do gubitka energije dolazi isključivo zbog viskoznog trenja između samih čestica fluida i čestica fluida i stijenke.

Kod prijelaznog i turbulentnog područja, ova se jednadžba ne može primjenjivati.

### 3.2.3. Turbulentno strujanje

Iz Reynoldsovog pokusa vidljiva je transformacija iz laminarnog strujanja u turbulentno. Do turbulentnog strujanja dolazi kod većih brzina strujanja fluda kada dolazi do miješanja između slojeva. Naime, zbog veće brzine i povećanja energije u sustavu putanje čestica postaju nepravilne te osim komponente brzine u smjeru osnovnog toka (u smjeru djelovanja pokretačke sile), pojavljuju se i bočne komponente kretanja čestica. Ovakvo gibanje je razlog zbog kojeg dolazi do vrtloženja.

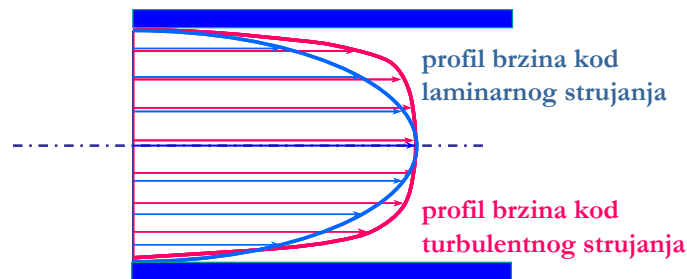
Pri turbulentnom strujanju se uvodi pojam **vremenski osrednjeno turbulentno strujanje**. To je matematički model strujanja u kojemu su strujnice pravilne linije.



Slika 13 Prikaz putanje čestice pri turbulentnom strujanju

3.2.3.1. Prikaz raspodjele brzina pri turbulentnom strujanju u cijevi

Kod turbulentnog strujanja strujnice su poprečne na smjer gibanja, a količina gibanja se prenosi grupama molekula (grozdovima). Raspodjela osrednjenih brzina je slična kao u laminarnom području, ali je profil vremenskih brzina bitno različit od profila brzina laminarnog strujanja.



Slika 14. Usporedba profila brzina pri laminarnom i turbulentnom strujanju

Kod laminarnog strujanja, brzina je maksimalna u središtu i nema miješanja između slojeva, mehanizam prijenosa je molekularan, dok se kod turbulentnog strujanja veći dio fluida kreće se sličnom brzinom, a profol brzina se prikazuje vremenski osrednjenom brzinom strujanja svih čestica.

Srednja brzina strujanja kod vrtložnog mehanizma prijenosa količine gibanja iznosi:

$$v_{sr.} = (0,7 - 0,9) \cdot v_{max.}$$

3.2.3.2. Gubitak energije pri turbulentnom strujanju u horizontalnoj cijevi

Pri strujanju realnog fluida dolazi do gubitka energije koji se izražava padom tlaka.

Pri izražavanju gubitka energije uobičajeno je koristiti **Eulerovu značajku**:

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho \cdot v^2}$$

$$\frac{F_i}{F_p} = \frac{m \cdot a}{p \cdot A} = \frac{\rho \cdot l^3 \cdot \frac{v^2}{l}}{p \cdot l^2} = \frac{\rho \cdot v^2}{p}$$

Eulerova značajka definira količinu izgubljene energije pri strujanju viskoznog fluida.

Eulerovu značajku možemo prikazati kao funkciju hidrodinamičkih uvjeta i geometrije sustava prikazane simpleksima specifičnim za cijev.

$$Eu = f\left(\text{Re}, \frac{\varepsilon}{d}\right) \cdot \frac{\ell}{d}$$

Funkcionalna ovisnost  $f\left(\text{Re}, \frac{\varepsilon}{d}\right)$  predstavlja faktor trenja  $\xi$ , a izražava utjecaj viskoznih sila i geometrijskih karakteristika pri strujanju fluida.

Dogovorno je, umjesto  $\xi$ , uvedeno  $\frac{\xi}{2}$  tako da se  $1/2$  poveže sa  $v^2 \cdot \rho$  te se na taj način dobiva

kinetička energija izražena po jedinici volumena  $\frac{v^2 \cdot \rho}{2}$ .

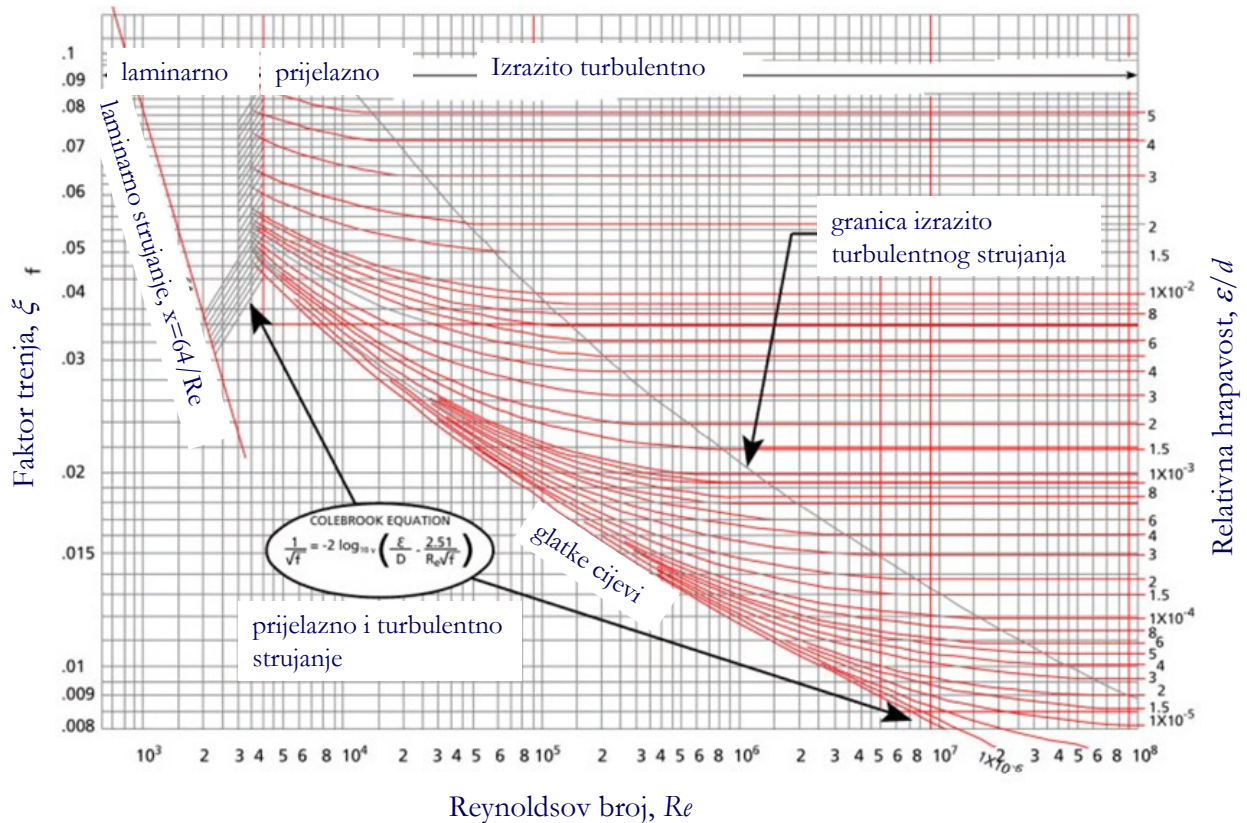
$$f\left(\text{Re}, \frac{\varepsilon}{d}\right) = \frac{\xi}{2}$$

Dobiva se jednadžba koja vrijedi za pad tlaka kod strujanja kroz cijev - **Darcy-Weissbachova jednadžba**:

$$\Delta p = \xi \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \cdot \frac{\ell}{d}$$

Ova se jednadžba može koristiti za sva područja strujanja, odnosno za sve mehanizme prijenosa količine gibanja.

Funkcionalna ovisnost  $f(\text{Re}, \varepsilon/d)$  određena je eksperimentalno i prikazana u *Moodyevom dijagramu*:



Slika 15. Moodyev dijagram

### 3.2.4. Moodyev dijagram

Kako se da se za laminarno strujanje može primijeniti i Darcy-Weissbachova i Hagen-Poiseuilleova jednadžba izjednačavanjem ova dva izraza dobiva se ovisnost faktora trenja o Reynoldsovom broju:

$$\xi \cdot \frac{\ell}{d} \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2} = \frac{32 \cdot \eta \cdot l \cdot v_{sr}}{d^2} \quad \xi = \frac{64}{Re}$$

Pri laminarnom strujanju faktor trenja ovisi samo o Reynoldsovoj značajci jer kod slojevitog strujanja sloj uz nepokretnu stijenku miruje te hrapavost cijevi (otpor oblika) ne utječe na vrijednost faktora trenja.

U prijelaznom i turbulentnom području utjecaj relativne hrapavosti cijevi ne može se zanemariti te faktor trenja ovisi i Reynolds značajci i relativnoj hrapavosti:

$$\xi = f\left(Re, \frac{\epsilon}{d}\right)$$

U izrazito turbulentnom području debljina laminarnog podsloja zanemariva je u odnosu na relativnu hrapavost, pa faktor trenja ovisi samo o relativnoj hrapavosti:

$$\xi = f\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)$$

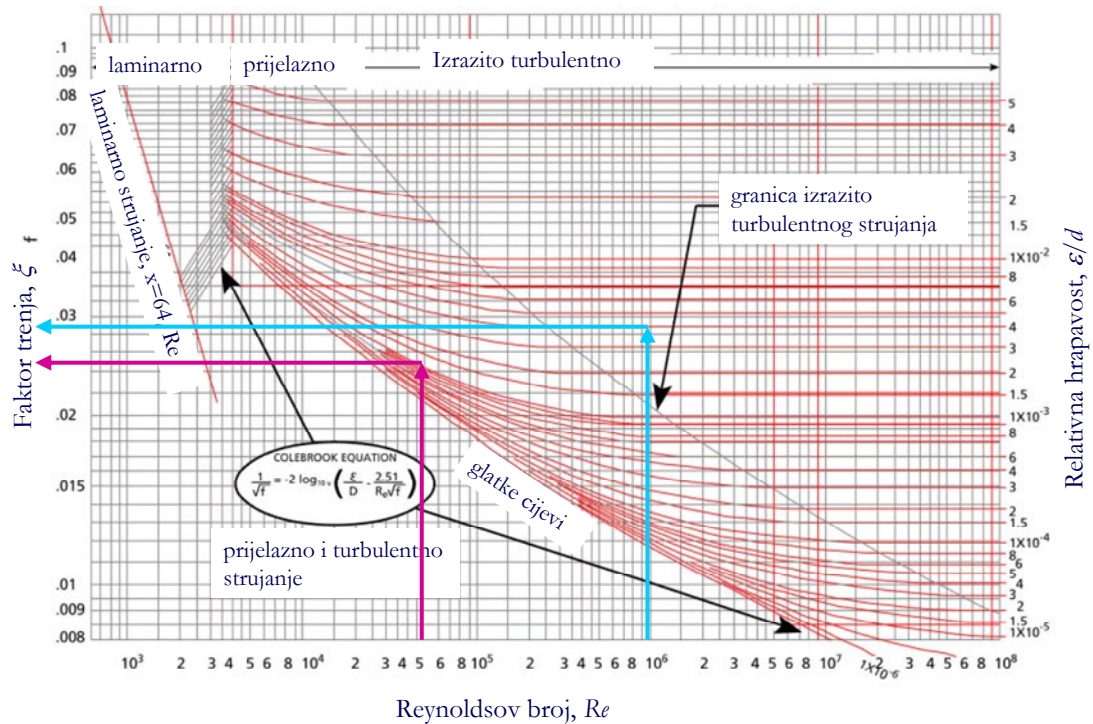
Način određivanja faktora trenja:

Primjer očitavanja faktora trenja  $\xi$  za turbulentno strujanje:

$$Re=100\ 000; \varepsilon/d=2 \cdot 10^{-3} \rightarrow \xi=0,025$$

Primjer očitavanja faktora trenja  $\xi$  za izrazito turbulentno strujanje:

$$Re=2 \cdot 10^6; \varepsilon/d=4 \cdot 10^{-3} \rightarrow \xi=0,029$$



Slika 16. Način određivanja faktora trenja

### 3.4. Protjecanje

#### 3.4.1. Cjevovod

Za transport fluida služe cjevovodi koji se sastoje od ravnog dijela cijevi i ugrađenih armaturnih dijelova. Prolaskom fluida kroz cjevovod dolazi do pada tlaka zbog protjecanja viskoznog fluida kroz ravni dio cijevi te kroz armaturne dijelove.

Konstrukcija armaturnih dijelova je takova da uzrokuje naglu promjenu smjera strujanja i vrtloženje (prisutan je otpor oblika) što uzrokuje gubitak kinetičke energije. Armaturni dijelovi su: ventili, koljena, T-nastavci, suženja, proširenja...



Modificiranjem Darcy-Weissbachove jednadžbe određuje se pad tlaka pri strujanju fluida kroz armature:

$$\Delta p_A = \zeta \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2}$$

Prolaskom fluida kroz armaturu stvaraju se mrtvi prostori te je nemoguće odrediti prave dimenzije armatura zato se umjesto umnoška faktora trenja I geometrijskog simpleksa cijevi uvodi faktor otpora armatura:

$$\zeta = \xi \frac{l}{d}$$

Ukupni gubitak energije (pad tlaka) može se izraziti kao suma gubitka energije zbog protjecanja na ravnom dijelu cijevi te protjecanja kroz armaturne dijelove cijevi:

$$\Delta p_{UK} = \Delta p_{RC} + \Delta p_A$$

Pad tlaka ravne cijevi računa se korištenjem Darcy-Weissbachove jednadžbe:

$$\Delta p_{RC} = \xi \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \cdot \frac{l}{d}$$

Ukupni pad tlaka za cjevovod s ugrađenim jednim mjesnim otporom:

$$\Delta p_{uk} = \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \cdot \left( \xi \cdot \frac{l}{d} + \zeta \right)$$

Odnosno za više mjesnih otpora:

$$\Delta p_{uk} = \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \cdot \left( \xi \cdot \frac{l}{d} + \sum_i \zeta_i \right)$$

Pad tlaka za armaturni dio cijevi može se odrediti preko ekvivalentne duljine cijevi,  $l_{ekv}$ . Ekvivalentna duljina cijevi je zamišljena duljina cijevi promjera  $d$  koja pruža isti otpor kao i odgovarajući armaturni dio.

$$\Delta p_{uk} = \xi \cdot \frac{l + l_{ekv}}{d} \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2}$$

Vrijednost mjesnih otpora određuju se eksperimentalno (mjeranjem pada tlaka) te se mogu naći tabelirane.

**Tablica 4. Vrijednosti faktora mjesnih otpora,  $\zeta$**

	Cijev 2"	Cijev 1"
T - nastavak ( $\rightarrow \perp$ )	0.047	0.076
T - nastavak ( $\uparrow \rightarrow \perp$ )	1.10	1.16
Koljeno	0.40	0.40

Suženje (2"/1")	0.32	
Proširenje (1"/2")		0.31
Zasun	0.33	0.33
Mjerna sapnica (do=0.019 m)	2.8	
Ulaz (utjecanje) u cijev		0.50
Istjecanje iz cijevi u spremnik		1.00

### 3.4.2. Pumpe

Pumpa je hidraulički radni stroj koji prima mehaničku energiju od nekog pogonskog stroja i pretvara je u hidrauličku energiju tekućine koja protječe. Služe za transport fluida na višu razinu ili u područje višeg tlaka.

#### 3.4.2.1. Snaga pumpe i ukupna djelotvornost pumpe

Za uspješnu provedbu procesa potrebno je poznavati efektivnu snagu pumpe,  $P_{ef}$ .

$$P_t = \dot{V}_t \cdot \rho \cdot (W_m)_t [J \cdot s^{-1}]$$

Snaga koju pumpa predaje tekućini manja je od snage koju pumpa prima. Uzrok tome su volumetrijski, hidraulički i mehanički gubici. Gubici su izraženi ukupnom djelotvornošću pumpe,  $\eta$ .

$$P_{ef} = \frac{P_t}{\eta}$$

Na ukupnu djelotvornost utječe niz faktora vezanih uz iskoristivost,  $\dot{V}$ ,  $P$ ,  $W$ .

Ukupan stupanj djelovanja (djelotvornost) uzima u obzir tri vrste gubitaka i dan je izrazom:

$$\eta = \eta_H \cdot \eta_M \cdot \eta_V$$

*Volumetrijska djelotvornost*- odnos stvarne i teoretske dobave, vrijednosti se kreću od 88 – 99 %.

$$\eta_v = \frac{\dot{V}}{\dot{V}_t} = \frac{\text{kapljevina koja stvarno odlazi u tlačni vod}}{\text{kapljevina koja prolazi kroz pumpu}} \quad \eta_v = \frac{\dot{V}}{\dot{V} + \dot{V}_g}$$

$\dot{V}_g$  – gubici

Volumetrijski gubitci nastaju zbog:

- ➔ neidealnost brtvljenja
- ➔ zbog konstrukcijskih nedostataka dolazi do kašnjenje u fazi rada
- ➔ kapljevine se zadržava u pumpi (mrtvi prostori) ili se vraća u nasisni vod

➔ apsorpciji zraka u tekućini

*Hidraulička djelotvornost* odnos je stvarnog rada pumpe i hidrauličkog rada pumpe, vrijednosti se kreću od 97 – 98 %.

$$\eta_H = \frac{\text{ostvarena visina dobave (mjera energije)}}{\text{teoretska visina dobave (uložena energija)}} \quad \eta_H = \frac{H_m}{H_t} = \frac{W}{W_t}$$

$H_m < H_t$  umanjeno zbog otpora same pumpe (trenja tekućine u pumpi i promjene smjera gibanja tekućine)

Manometarska visina: je mjera za energiju potrebnu da se kapljevina transportira s visine  $z_1$  na  $z_2$ , da se savladaju razlike tlakova koji vladaju u spremnicima 1 i 2, razlika kinetičke energije i gubici energije zbog mehaničkog trenja.

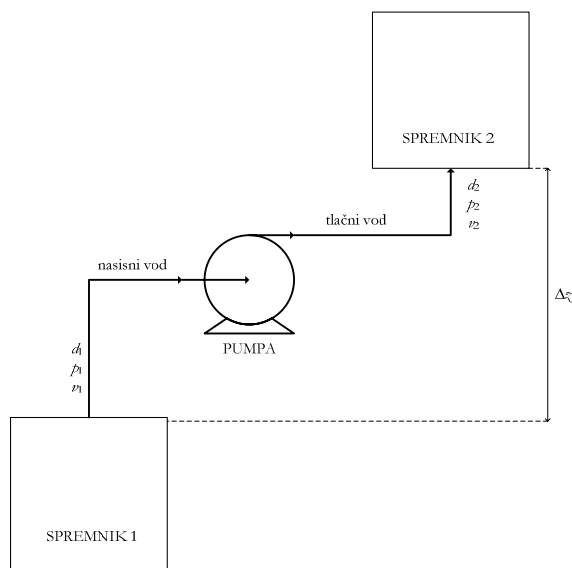
$$H_m = z_2 - z_1 + \frac{p_2 - p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + h_w$$

*Mehanička djelotvornost* obuhvaća mehaničke gubitke u pumpi i njenom pogonskom mehanizmu i to zbog mehaničkog trenja u ležajevima, kao posljedica mehaničkog trenja dijelova pumpe koji se nalaze u zahvatu. Vrijednosti stupnja djelovanja kreću se od 85 – 98 %.

$$\eta_M = \frac{P_t}{P_{ef}}$$

### 3.4.3. Specifični rad pumpe

Specifični rad (J/kg) potreban za transport kapljevine izračunava se na temelju Bernoullijeve jednadžbe:



Slika 17. Shematski prikaz pumpnog postrojenja

$$W_m = (\xi_{z,2} - \xi_{z,1}) \cdot g + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + h_w \cdot g$$

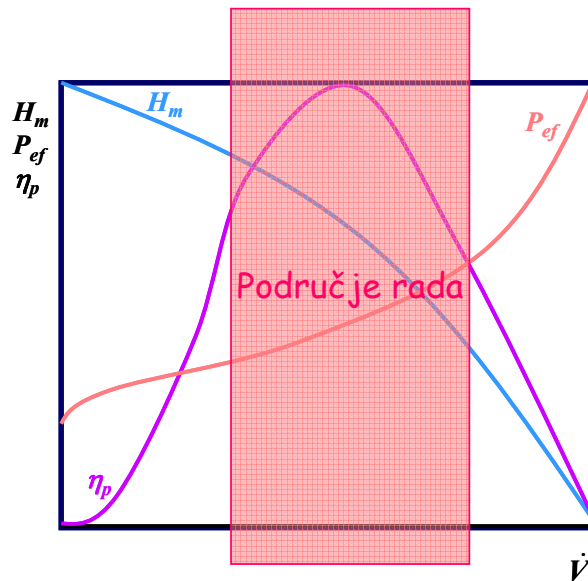
Gdje  $\Delta z$  predstavlja visinsku razliku spremnika 1 i 2,  $p_2 - p_1$  razliku tlakova u spremnicima te  $v_2^2 - v_1^2$  razlika kvadrata brzina u tlačnom i nasisnom vodu.  $h_w$  predstavlja gubitke u sustavu izražene visinom.

Poznavanjem rada pumpe, protoka kapljevine u sustavu, gustoće i djelotvornosti pumpe, može se odrediti snaga pumpe potrebna za transport kapljevine od spremnika 1 do spremnika 2.

$$P_{ef} = \frac{W_m \cdot \rho \cdot \dot{V}}{\eta}$$

### 3.4.4. Radna karakteristika pumpe

Uz svaku pumpu su priložene karakteristike pumpe. Na osnovi tih karakteristika određuje se namjena i optimalno područje rada pumpe. Procesne karakteristike pumpe: *protok (dobava)* i *visina dobave* funkcionalno su povezani, a jedinična potrošnja električne energije po količini dobave ( $\text{kWh/m}^3$ ) značajno se mijenja u ovisno o radnoj točki pumpe. Svaka pumpa ima specifičan odnos karakteristika, koje se prikazuju u osnovnom dokumentu (grafičkom prikazu) pumpe pod nazivom *karakteristika pumpe*. Iz njega se može vidjeti, kako se za definiranu količinu protoka mijenja stupnj djelovanja pumpe, visina dobave



Slika 18. Radne karakteristike pumpe

Određivanje djelotvornosti i visine dobave pumpe:

$$\eta_{ef} = \frac{\dot{V} \cdot \Delta p}{P_{ef}}$$

$$H_m = \frac{\Delta p}{\rho \cdot g}$$

### 3.4.5. Podjela pumpi

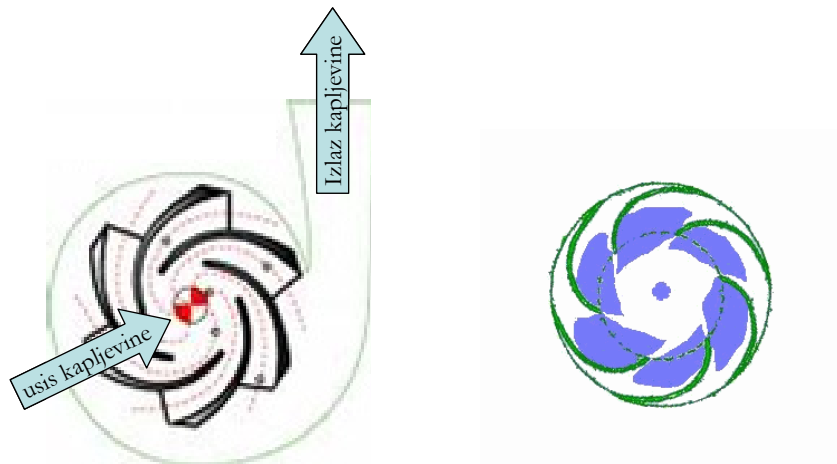
Pumpe se razlikuju po načinu pretvorbe energije i po konstrukciji, različiti autori rade različite podjele vrsta pumpi. U ovom kratkom pregledu napravljena je podjela s obzirom na način djelovanja:

#### 3.4.5.1. Dinamičke pumpe

Dinamičke pumpe mogu biti: centrifugalne, mlazne, uzgonske, stapne; membranske.

Kapljevina se transportira djelovanjem sila koje se na nju prenose u prostoru (kućištu) koje je neprekidno povezano s usisnim i tlačnim cjevovodom.

Centrifugalna pumpa je u praksi zastupljena više od 80 %.

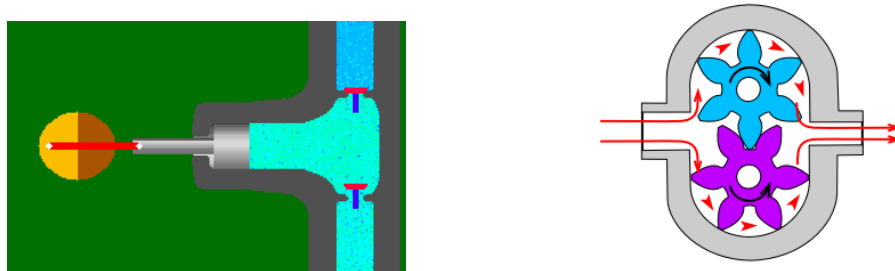


Slika 19. Shema centrifugalne pumpe

3.4.5.2. Volumenske pumpe

Volumenske pumpe su: pulzirajuće, rotacijske, stepne, membranske...

Kapljevina se prenosi pomoću periodičkih promjena volumena prostora koji zauzima kapljevina, a koji se naizmjenično povezuje s usisnim tlačnim cjevovodom.



Slika 20. Primjeri volumenskih pumpi

### 3.5. Optjecanje

Optjecanje je strujanje fluida oko čvrstog fluida, bilo da je tijelo uronjeno i nepokretno u struji fluida ili se ono giba u struji fluida. Bitno je da postoji relativna brzina između tijela i fluida.

U oba slučaja se u viskoznom fluidu pojavljuje sila otpora koja je posljedica viskoznog trenja i otpora oblika.

Slika strujnica oko tijela koje se giba ovisi o brzini fluida, promjeru i obliku tijela, odnosno o Reynoldsovom broju. Reynoldsov broj je definiran jednadžbom:

$$Re = \frac{v \cdot d_c \cdot \rho}{\eta}$$

$v$  relativna brzina strujanja fluida oko prepreke

$d_c$  promjer čestice

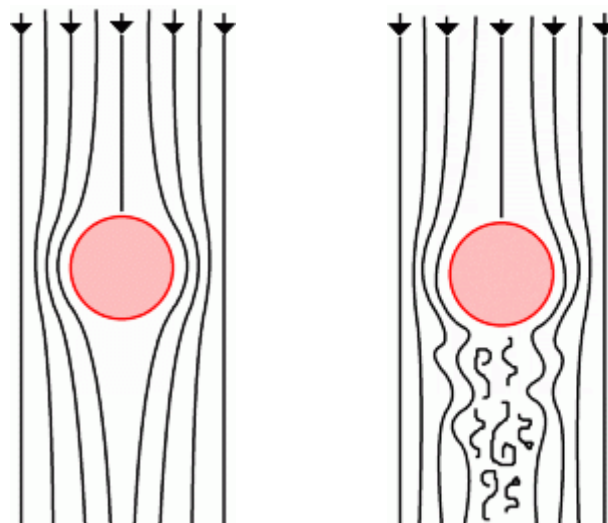
$\rho$  gustoća fluida

$\eta$  viskoznost fluida

Promotrit ćemo primjer optjecanja fluida oko istog oblika, ali pri različitim brzinama strujanja.

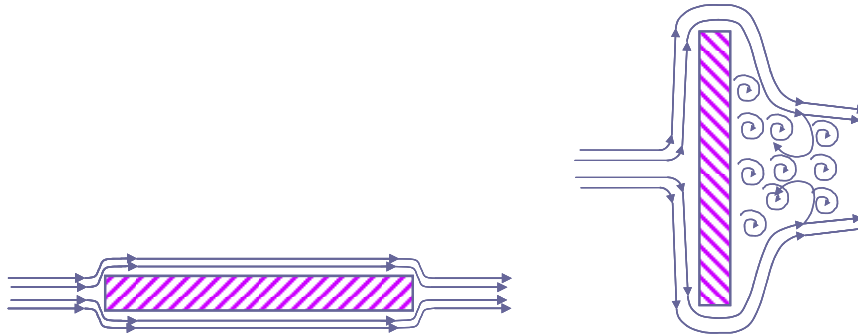
Ako je brzina strujanja mala,  $Re < 1$ , radi se o laminarnom strujanju oko objekta gdje nema miješanja između slojeva, a strujnice su pravocrtne i može se reći da fluid "puzi" oko tijela. Glavni otpor javlja se zbog površinskog trenja.

Pri većim brzinama i višim vrijednostima  $Re$ , iza objekta dolazi do vrtloženja fluida, tok je turbulentan. Povećanjem brzine doći će do naglog odcjepljenja graničnog sloja te će se stvoriti mrtvi prostor iza objekta. U ovom slučaju prevladava otpor oblika.



Slika 21. a) Optjecanje pri malim brzinama,  $Re < 1$       b) Optjecanje pri većim brzinama,  $Re > 1$

Na slici je prikazano optjecanje fluida za ploču uz koju struji fluid, odnosno u slučaju okomitog nastrujavanja. Kod horizontalnog nastrujavanja strujnice obilaze ploču bez odvajanja i miješanja slojeva te nema pojave vrtloga iza zavjetrinske strane tijela, strujna slika ispred i iza ploče je gotovo simetrična. Postavljanjem ploče okomito na smjer strujanja, uočava se narušavanje simetričnosti strujne slike iza tijela. Uslijed inercije čestica fluida, zbog naglog skretanja strujnica, dolazi do odvajanja graničnog sloja te se pojavljuju vrtlozi iza tijela.



Slika 22. Optjecanje za različit oblik, pri istim brzinama strujanja

Kod malih Reynoldsa i pogodnog oblika dominirat će viskozno trenje, ali je prisutan i otpor oblika. Kod velikih Reynoldsa ili nepogodnog oblika dominirat će otpor oblika, dolazi do vrtloženja.

### 3.5.1. Otpor čvrstog tijela kod optjecanja

U viskoznom fluidu pri optjecanju pojavljuje se sila otpora koja je posljedica:

- ☞ viskoznog trenja
- ☞ otpora oblika

$$F_{\text{uk}} = F_D = F_{\text{tr}} + F_i$$

**Otpor trenja** se javlja zbog utjecaja viskoznosti te dolazi do gubitka tlačne energije. Otpor trenja je rezultanta svih površinskih sila koje djeluju na površinu tijela u smjeru strujanja fluida. Obzirom da viskoznost fluida uzrokuje trenje između slojeva fluida te fluida i površine čvrstog tijela, ovaj otpor se naziva površinski otpor.

**Otpor oblika** otpor oblika je uzrokovan i ovisan o obliku tijela, prevladava kod većih Reynoldsovih brojeva, jednak je zbroju svih komponenti tlaka okomitog na površinu tijela, a rezultat je gubitka kinetičke energije.



### Laminarno područje $Re < 1$

Stokes je riješio skup diferencijalnih jednadžbi koje opisuju pojave pri optjecanju u laminarnom području i dobio izraz za silu otpora kod laminarnog strujanja:

$$F_D = 3 \cdot \pi \cdot \eta \cdot d \cdot v$$

Slično kao i kod protjecanja u laminarnom području, otpor se može odrediti bez poznavanja faktora otpora. Kako kod optjecanja fluid direktno nastrojava na čvrsto tijelo, sila otpora ovisi osim o trenju i otporu oblika

$$F_D = \underbrace{2 \cdot \pi \cdot \eta \cdot d \cdot v}_{\text{sila\_trenja}} + \underbrace{\pi \cdot \eta \cdot d \cdot v}_{\text{sila\_inercije}}$$

Podsjetimo se da kod protjecanja faktor trenja u laminarnom području ovisi samo o hidrodinamici.

### Sila otpora za sva područja Reynoldsovog broja

Sila otpora kod optjecanja ovisi o hidrodinamičkim uvjetima u sustavu te o obliku čestice oko koje optječe fluid.

$$F_D = f(v, \rho, \eta, d, \psi).$$

Brzina, promjer čestice i gustoća fluida grupiraju se u Reynoldsov broj kojim se definira hidrodinamika sustava.  $\psi$  je sferičnost tijela i predstavlja omjer površine tijela i kugle istog volumena.

Kako je  $\frac{F_D}{d^2} = \tau$ , smično naprezanje iznosi:

$$\tau = f(\mathbf{Re}, \psi) \cdot v^2 \rho$$

Dijeljenjem s  $v^2 \rho$  dobiva se Eulerova značajka kojom se definira snaga u sustavu, a funkcija je:

$$Eu = f(\mathbf{Re}, \psi)$$

$$\frac{\tau}{v^2 \rho} = \frac{\Delta p}{v^2 \rho} = Eu = f(\mathbf{Re}, \psi) \text{ što predstavlja korelacijsku jednadžbu istovjetnu s korelacijskom}$$

jednadžbom pri protjecanju, a koja ukazuje na isto značenje: gubitak energije pri protjecanju ovisi o hidrodinamičkim uvjetima i geometrijskim karakteristikama sustava.

Dogovorno je uvedeno da se funkcionalna ovisnost  $f(\mathbf{Re}, \psi)$  izražava faktorom otpora:

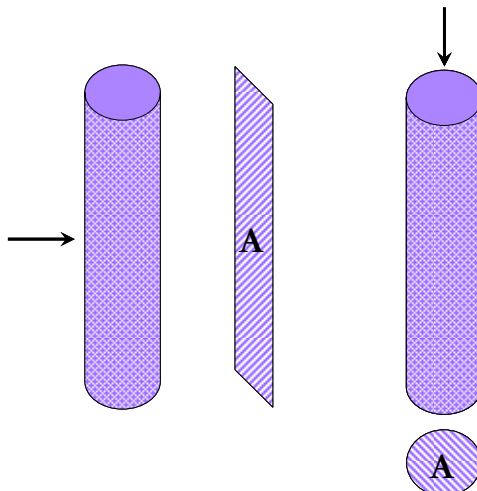
$$f(\mathbf{Re}, \psi) = \frac{C_D}{2}$$

Iz čega slijedi izraz za silu otpora pri optjecanju:

$$F_D = C_D \cdot A \cdot \frac{v^2 \rho}{2}.$$

Ova jednadžba može se koristiti za sva područja pri optjecanju.

Obzirom da je sila jednaka umnošku tlaka i površine na koju taj tlak djeluje. Prilikom određivanja sile otpora pri optjecanju, bitno je definirati površinu koja predstavlja projiciranu površinu tijela okomitu na smjer strujanja.



Slika 23. Način određivanja projicirane površine

### 3.5.2. Ovisnost faktora otpora o Reynoldsovoj značajci

Kako u laminarnom području vrijede oba izraza za silu otpora, izjednačavanjem tih izraza, može se doći ovisnosti faktora trenja o Reynoldsovoj značajci:

$$F_{D,lam} = F_{D,opć}$$

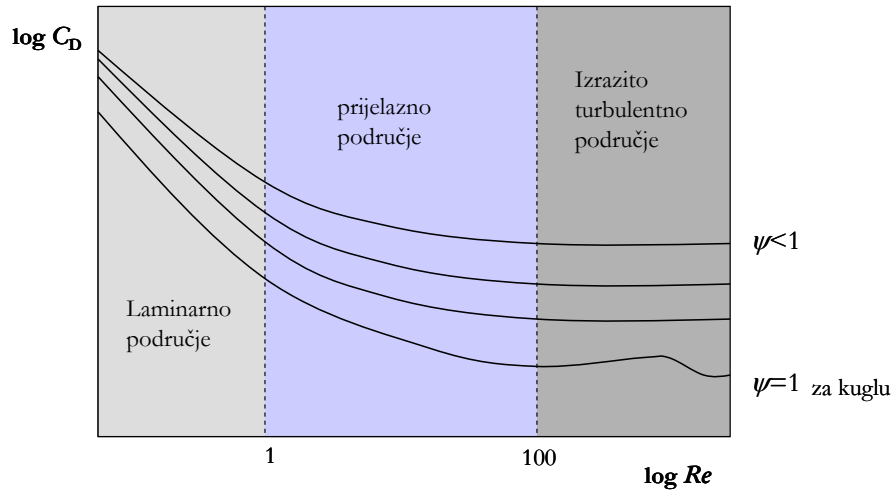
$$3 \cdot \pi \cdot \eta \cdot d \cdot v = c_D \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2}$$

$$c_D = \frac{24 \cdot \eta}{v \cdot d \cdot \rho}$$

$$c_D = \frac{24}{Re}$$

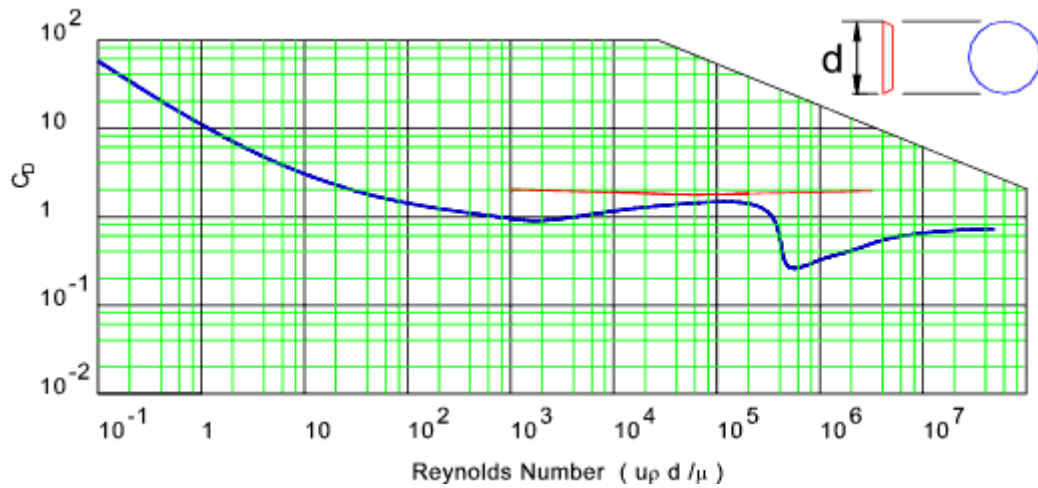
Na shematskom prikazu ovisnosti faktora otpora o  $Re$  značajci, vidljivo je da je u laminarnom području (do  $Re=1$ ), ovisnost faktora otpora,  $C_D$  o  $Re$ -značajci je linearna, a zatim funkcija prelazi u krivulju. Za razliku od Moodyevog dijagrama, funkcija je neprekidna jer je utjecaj oblika prisutan bez obzira na mehanizam prijenosa količine gibanja.

Faktor otpora oblika ovisi o Reynoldsovom broju, osim za potpuno razvijenu turbulenciju u strujanjima iznad kritičnog Reynoldsovog broja.

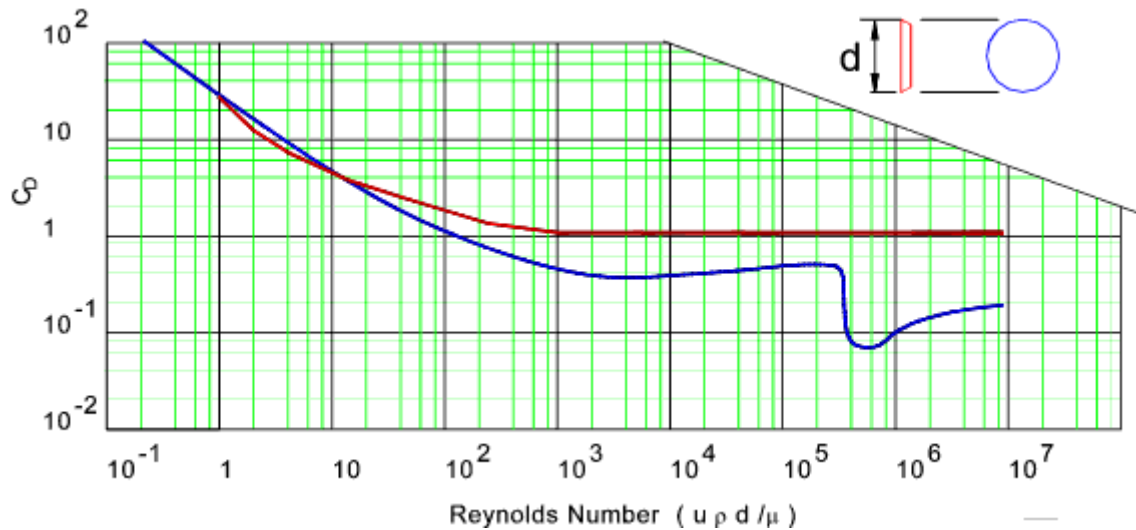


Slika 24. Shematski prikaz ovisnosti faktora otpora o  $Re$  značajci

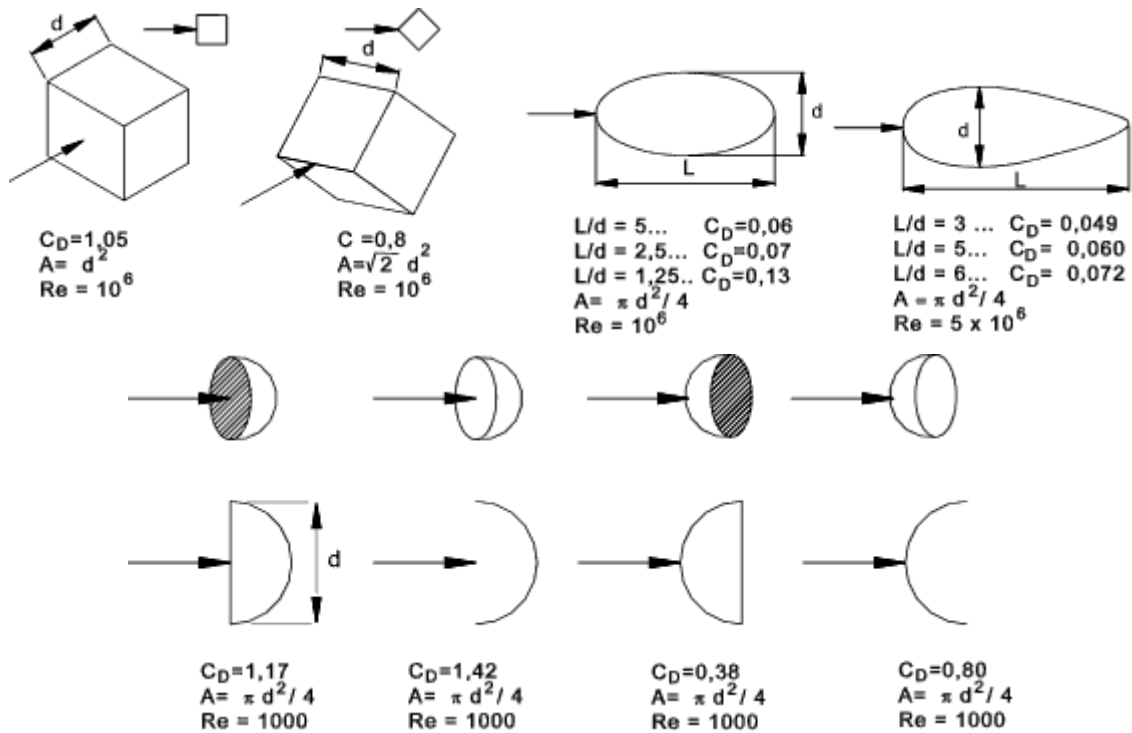
Na sljedećim slikama prikazana je ovisnost faktora otpora za različite oblike o Reynoldsovoj značajci.



Slika 25. Ovisnost faktor otpora o  $Re$  značajci za ploču, odnosno cilindar.



Slika 26. Ovisnost faktor otpora o  $Re$  značajci za **disk**, odnosno **sferu**



Faktor otpora,  $C_D$  za ljudsko tijelo automobil  
 1 - 1,3 0,37

Vrijednosti faktora otpora i način određivanja projicirane površine tijela za različite oblike i smjer nastujavanja kapljevine na tijelo.

### 3.6. Strujanje u miješalici

U kemijskoj i drugim procesnim industrijama, većina operacija u velikoj mjeri ovisi o djelotvornom miješanju. Miješanje je operacija kojom se smanjuje koncentracijski, temperaturni gradijent ili oba istovremeno, odnosno pospješuje se prijenos topline i tvari. Sustav u kojemu su u sve komponente ravnomjerno raspoređene te imaju istu temperaturu u svakoj točki naziva se **idealno izmiješan medij**.

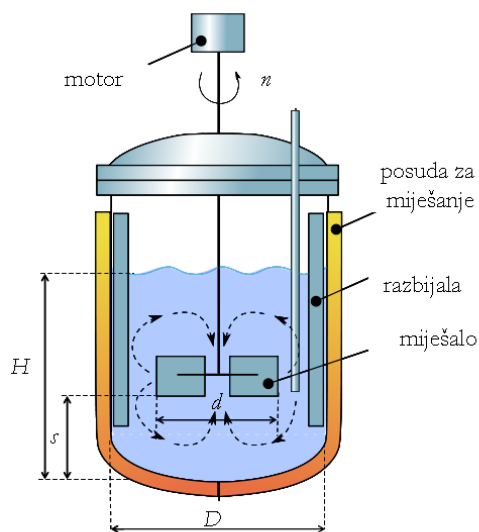
Miješanje se provodi u svrhu:

- miješanja dviju mješljivih tekućina (npr. alkohol i voda)
- otapanja krutine u tekućini (npr. sol u vodi)
- raspršivanja plina u tekućini (npr. mjehurići kisika u vodi – u svrhu pročišćavanja voda)
- suspendiranja finih čestica u tekućini

- miješanja fluida radi poboljšanja prijenosa topline (npr. preko plašta posude).

### 3.6.1. Oprema za miješanje

Oprema za miješanje se sastoji od *posude*, jednog ili više *miješala* koje uzrokuje smično naprezanje i tok fluida u posudi te 4 *razbijala* raspoređena u posudi koja služe za razbijanje vrtloga koji mogu nastati pri većim brzinama vrtnje miješala. Tekućine se najčešće miješaju u cilindričnoj posudi koja može biti otvorena ili zatvorena. Visina punjenja tekućine približno je jednaka promjeru posude. Miješalo se pokreće električnim motorom (slika ).



$n$  – broj okretaja miješala, min<sup>-1</sup>

$H$  – visina kapljevine u miješalici, m

$D$  – promjer posude, m

$d$  – promjer miješala, m

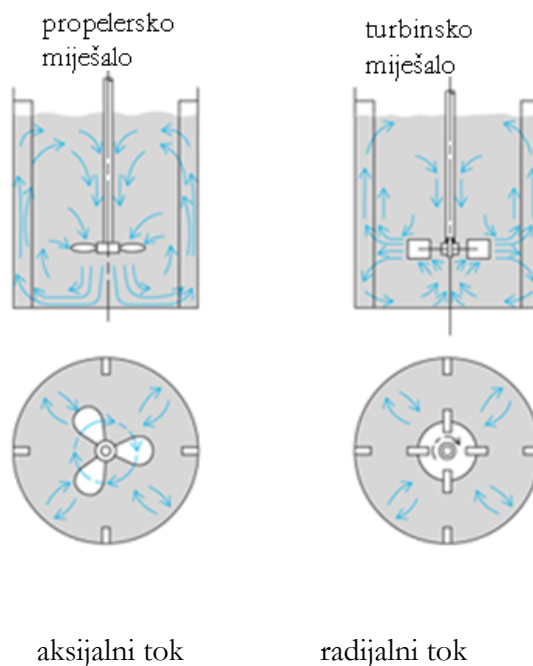
$s$  – udaljenost miješala od dna posude, m

Slika 27. Shema posude za miješanje

Geometrijske karakteristike miješalice definirane su odnosima između geometrijskih dimenzija posude i miješala (simpleksi):

$$S_1 = \frac{H}{d} \quad S_2 = \frac{D}{d} \quad S_3 = \frac{s}{d}.$$

Za miješanje vrlo je bitan dizajn miješala koji ima velik utjecaj na tok u posudi i na energiju potrebnu za miješanje. Postoji nekoliko različitih tipova miješala, a koji mogu uzrokovati različite tokove u posudi (aksijalni ili radijalni tok – slika ).



Slika 28. Prikaz različitih tokova u posudi za miješanje

### 3.6.2. Snaga potrebna za miješanje

Eksperimentalnim ispitivanjima utvrđena je ovisnost snage o hidrodinamici u sustavu, geometriji sustava te gravitaciji:

$$\frac{E}{t} = P = f(n, t, \eta, \rho, S_1, S_2, S_3, g).$$

Ova ovisnost se može prikazati i grupiranjem fizikalnih veličina u bezdimenzijske značajke i simplekse:

$$Eu_M = f(Re_M, Fr_M, S_1, S_2, S_3)$$

$Re_M$  – modificirana Reynoldsova značajka

$Fr_M$  - modificirana Frudova značajka

$Eu_M$  –modificirana Eulerova značajka

Eulerova značajka predstavlja odnos sile tlaka i sile inercije, te predstavlja mjeru za količinu izgubljene energije pri strujanju viskoznog fluida. Eulerova značajka naziva se i značajka snage:

$$Eu = \frac{F_p}{F_i} = \frac{m \cdot a}{p \cdot A} = \frac{p \cdot l^2}{\rho \cdot l^3 \cdot \frac{v^2}{l}} = \frac{\Delta p}{\rho \cdot v^2}$$

Zbog kružnog gibanja čestica fluida u procesu miješanja, uvode se modificirane značajke:

$$n = v \cdot d \cdot \pi$$

Modificirana *Reynoldsova* značajka:

$$Re_M = \frac{n \cdot d^2 \cdot \rho}{\eta}$$

Kako se pri procesu miješanja čestice gibaju i u vertikalnom smjeru, potrebno je uzeti u obzir utjecaj gravitacijske sile, odnosno *Frouddovu* značajku:

$$Fr_M = \frac{n^2 \cdot d}{g}$$

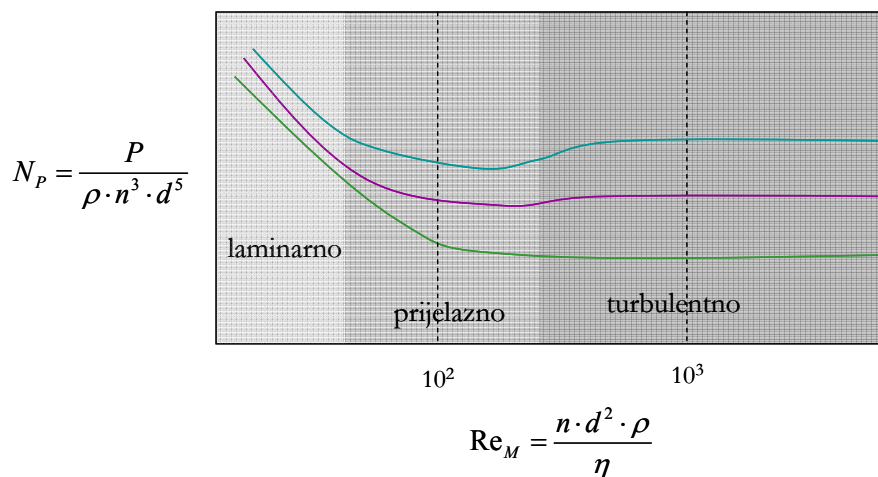
Modificirana *Eulerova* značajka:

$$Eu_M = \frac{\Delta p \cdot \dot{V}}{\rho \cdot v^2 \cdot \dot{V}} = \frac{P}{\rho \cdot v^2 \cdot A \cdot v} = \frac{P}{\rho \cdot (d \cdot \pi \cdot n)^2 \cdot d^2 \cdot d \cdot \pi \cdot n}$$

$$Eu_M = N_p = \frac{P}{\rho \cdot n^3 \cdot d^5}$$

Bezdimenzijska korelacijska jednadžba se sada može izraziti:

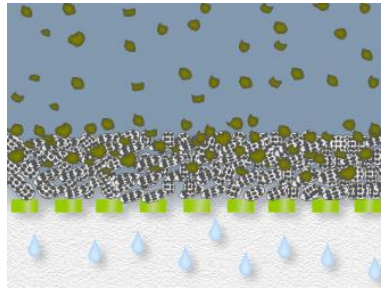
$$Eu_M = k \cdot Re_M^m \cdot Fr_M^n$$



Slika 29. Shematski prikaz značajke snage o modificiranoj Reynoldsovoj značajki za različitu geometriju

### 3.7. Strujanje kroz porozni sloj

Proces strujanja fluida kroz porozni sloj je zbog problema u definiranju geometrije sustava izrazito složen. Sloj kroz koji struji fluid načinjen je od čestica različitih veličina i oblika koje slaganjem u sloj tvore nepravilne prolaze različitog promjera i duljine. Tako porozni sloj možemo zamisliti kao niz isprepletenih nepravilnih kanala, kroz koje pod utjecajem pokretačke sile struji fluid.



Slika 30. Formiranje poroznog sloja

Mnoge geometrijske značajke nastalog poroznog sloja je teško definirati stoga, da bi se proces strujanja fluida kroz porozni sloj kvantitativno opisao, je neophodno pri definiranju zakonitosti prvo odrediti mjerljive veličine ili veličine određene poluempirijski:

- ✓ debljina poroznog sloja
- ✓ poroznost,  $\varepsilon$  - udio šupljina u poroznom sloju

$$\varepsilon = \frac{V_{pora}}{V_{sloja}}$$

- ✓ broj čestica

$$n = \frac{V_{sloja} \cdot (1 - \varepsilon)}{V_{1čestice}} = \frac{A_{sloja} \cdot \ell \cdot (1 - \varepsilon)}{\frac{d_{\varepsilon}^3 \cdot \pi}{6}}$$

- ✓ specifična površina.  $S_V$

$$S_V = \frac{S_{uk}}{V_{sloja}} = \frac{n \cdot S_{1čestice}}{V_{sloja}} = \frac{\frac{A_{sloja} \cdot \ell \cdot (1 - \varepsilon)}{\frac{d_{\varepsilon}^3 \cdot \pi}{6}} \cdot d_{\varepsilon}^2 \cdot \pi}{A_{sloja} \cdot \ell}$$

ovo je ukupna površina svih pora podijeljena s volumenom sloja.

- ✓ promjer pora,  $d_{ekv}$

$$d_{ekv} = 4 \cdot \frac{A_p}{O} = 4 \cdot \frac{A_p}{O} \cdot \frac{l}{l} = 4 \cdot \frac{V_p}{S_{uk}} = 4 \cdot \frac{\frac{V_p}{V_{sl}}}{\frac{S_{uk}}{V_{sl}}} = 4 \cdot \frac{\varepsilon}{S_v}$$

- ✓ Površinska brzina,  $v_A$

Ova brzina predstavlja brzinu nastrujavanja suspenzije na površinu filtracijskog sredstva i omogućava određivanje brzine strujanja kroz porozni sloj:



$$v_A = v \cdot \frac{A_{pora}}{A_{sloja}} = v \cdot \varepsilon.$$

Na temelju zakona o očuvanju količine gibanja može se postaviti bilanca sila:

$$\Delta p \cdot A_p = n \cdot F_D$$

sila koja uzrokuje gibanja jednaka je sili trenja koja uzrokuje gubitak energije.

Strujanjem fluida kroz porozni sloj dolazi do gubitka energije u sustavu iz dva razloga: zbog površinskog (viskozno) trenja ali i zbog otpora oblika.

Polazeći od Darcy-Weisbachove jednadžbe i jednadžbe izraza za silu otpora pri optjecanju, dolazi se do **opće jednadžbe** za pad tlaka pri strujanju kroz porozni sloj.

$$\Delta p \cdot A_{sloja} \cdot \varepsilon = \frac{A_{sloja} \cdot \ell \cdot (1 - \varepsilon)}{\frac{d_\varepsilon^3 \cdot \pi}{6}} \cdot c_D \cdot \frac{d_\varepsilon^2 \cdot \pi}{4} \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2}$$

sređivanjem izraza dobiva se izraz za procjenu pada tlaka pri strujanju kroz porozni sloj (za uske i široke pore):

$$\Delta p = \frac{3}{2} \cdot c_D \cdot \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon^3} \cdot \frac{\ell}{d_\varepsilon} \cdot \frac{v_A^2 \cdot \rho}{2}.$$

Ova jednadžba podsjeća na *Darcy-Weisbachovu* jednadžbu, a razlika nastaje zbog složene geometrije strukture poroznog sloja.

### 3.7.1. Strujanje kroz uske pore

Ovisno o veličini čestica formirat će se manje ili veće pore. Ukoliko su čestice sitnije, formirat će se uski kanali te se zbog većeg otpora ostvaruju manje brzine strujanja fluida - laminarno.

Režim strujanja kroz porozni sloj može se odrediti iz modificiranog izraza za Reynoldsovu značajku:

$$\text{Re} = \frac{2 \cdot d_\varepsilon \cdot v_A \cdot \rho}{3 \cdot (1 - \varepsilon) \cdot \eta}$$

Eksperimentalno je utvrđeno da pri mlaminarnom strujanju fluida između sferičnih čestica, faktor otpora iznosi:

$$C_D = \frac{160}{\text{Re}}.$$

Slične izraze uz druge konstante, nalazimo i pri određivanju faktora trenja kod protjecanja ili faktora otpora kod optjecanja za laminarni režim strujanja.

Uvrštenjem ovog izraza u opću jednadžbu za pad tlaka u poroznom sloju, dobiva se izraz koji se koristi u laminarnim uvjetima strujanja fluida kroz porozni sloj:

$$\Delta p = 180 \cdot \frac{(1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \cdot \frac{l}{d_\varepsilon^2} \cdot v_A \cdot \eta$$

Ova jednadžba naziva se *Carman-Kozenyjeva* jednadžba te vrijedi za laminarno strujanje fluida kroz porozni sloj.

### 3.7.2. Strujanje kroz široke pore

Formiranjem poroznog sloja od krupnijih čestica nastaju šire pore kroz koje zbog manjeg otpora fluid struji većim brzinama - turbulentno. U ovim uvjetima se *Burke* i *Plummer* utvrdili vrijednost faktora otpora:

$$C_D = 2,3.$$

Uvrštavanjem u opću jednadžbu, dobiva se jednadžba koja se koristi za pad tlaka u uvjetima turbulentnog strujanja:

$$\Delta p = 1,75 \cdot \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon^3} \cdot \frac{l}{d_\varepsilon} \cdot v_A^2 \cdot \rho$$

Kako se u praksi prisutna uglavnom oba mehanizma strujanja, zbrajanjem *Carman-Kozenyjeve* jednadžbe i jednadžbe koja vrijedi za veće brzine strujanja, dobiva se izraz, poznat kao *Ergunova* jednadžba:

$$\Delta p = 180 \cdot \frac{(1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \cdot \frac{l}{d_\varepsilon^2} \cdot v_A \cdot \eta + 1,75 \cdot \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon^3} \cdot \frac{l}{d_\varepsilon} \cdot v_A^2 \cdot \rho$$

#### 4. PRIJENOS TOPLINE

Prijenos topline igra važnu ulogu u mnogim industrijskim procesima, hlađenju ili zagrijavanju procesnih struja, pri izmjeni topline između dva medija, ukapljivanju pare, hlađenju reaktora i kristalizatora...

Kako pri prijenosu količine gibanja i topline/tvari postoji fenomenološka analogija koja pridonosi razumijevanju fenomena transporta ali i jediničnih operacija, ponovno polazimo od općeg zakona očuvanja:

$$V \cdot \frac{dX_V}{dt} = \dot{V}_{ul.} \cdot X_{V,ul.} - \dot{V}_{izl.} \cdot X_{V,izl.} + V$$

gdje  $X_V$  predstavlja količinu topline po jedinici volumena:

$$V \cdot \frac{dQ}{dt} = \dot{V}_{ul.} \cdot Q_{V,ul.} - \dot{V}_{izl.} \cdot Q_{V,izl.} + V$$

$Q_V$  - količina topline izražena po jedinici volumena

$\dot{V}$  - volumni protok

Da bi došlo do prijenosa topline, mora postojati pokretačka sila procesa, odnosno razlika temperatura. Proces je stacionaran ako nema ovisnosti temperaturnog gradijenta o vremenu

$\frac{(dT/dy)}{dt} = 0$ , a nestacionaran ukoliko dolazi do promjene temperaturnog gradijenta

$\frac{(dT/dy)}{dt} \neq 0$ .

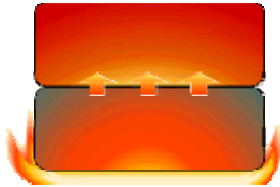
Intenzitet prijenosa topline ovisi o:

- ✓ pokretačkoj sili – razlici temperatura,
- ✓ otporima koji se javljaju
- ✓ površini kroz koju dolazi do izmjene topline.

Toplina uvijek prelazi s područja niže na područje više temperature do uspostave toplinske ravnoteže. Molekule na višoj temperaturi se brže kreću i prenose svoju energiju na molekule niže temperature koje se sporije kreću. Otpori koji se javljaju prilikom prijenosa topline s jednog mjesta na drugo ovise o tvari kroz koju se toplina prenosi. Svaki materijal ima karakteristično toplinsko svojstvo koje se može okarakterizirati npr. *koeficijentom toplinske vodljivosti*,  $\lambda$  ili *koeficijentom temperaturne vodljivosti*,  $a$ . Što su veće vrijednosti ovih koeficijenata, manji je otpor prijenosu topline (medij je dobar vodič).

Toplina se može prenositi na tri načina:

**Kondukcijom** - strujanje topline između točkica koje su u izravnom kontaktu, u čvrstim tijelima ili fluidima u mirovanju ili pri gibanju fluida malim brzinama. Kako je svaki atom fizički povezan sa susjednim atomima (različite kemijske veze), dovodjenjem energije jednom dijelu čvrste tvari uzrokovat će dodatne vibracije atoma. Zbog tih vibracija, veze među atomima će također dodatno vibrirati što u konačnici dovodi do povišenja temperature u čvrstom tijelu.

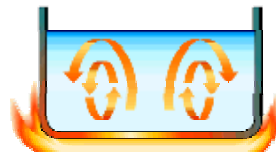


Slika 31. Prijenos topline u čvrstom tijelu.

Svi atomi vibriraju, ali pri višim temperaturama vibracije su jače. U metalima slobodni elektroni prenose energiju brže nego vibracije u atomima – zbog toga su metali najbolji vodiči topline

**Konvekcijom** – predstavlja prijenos topline cirkulacijom ili kretanjem toplih čestica prema hladnijem prostoru, prijenos topline unutar ili između fluida u strujanju.

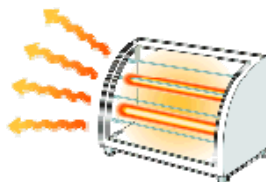
Hladnije čestice se gibaju i izmjenjuju s toplim. Pri tome se hladne čestice zagrijavaju te se proces nastavlja stvarajući tako struju konvekcije.



Slika 32. Prijenos topline u kapljevini

Gustoća kapljevine ili plinova ovisi o temperaturi. Npr. zagrijani zrak ima manju gustoću od hladnog zraka. Zbog toga dolazi do cirkulacije zraka

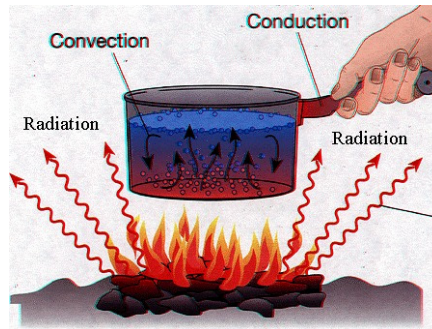
**Zračenjem** - predstavlja prijenos topline elektromagnetskim zračenjem između površina različite temperature koje su odvojene medijem koji provodi toplinsko zračenje.



Slika 33. Prijenos topline zračenjem

Kao i svjetlost elektromagnetsko zračenje se prenosi u vakuumu i prenosi se u svim smjerovima  
Sva tri mehanizma prijenosa topline odvijaju se najčešće istovremeno.

Ova tri mehanizma prijenosa topline odvijaju se najčešće istovremeno.



Slika 34. Prikaz prijenosa topline sa sva tri mehanizma

#### 4.1. Kondukcija

Kondukcija ili toplinsko provođenje je molekularni mehanizam prijenosa topline pri kojem su čestice tvari u direktnom kontaktu. Karakterističan je za čvrsta tijela, a ovisi o fizikalnim svojstvima tvari, geometrijskim karakteristikama te o lokalnim razlikama u temperaturi. Prisutan je i kod kapljevine i plinova u mirovanju.

##### 4.1.1. Stacionarna kondukcija topline kroz jednoslojni zid

Promatranjem prijenosa topline u stacionarnim uvjetima kroz jednoslojni zid u smjeru osi  $y$ , može se zaključiti da tok topline ovisi o razlici temperatura, površini izmjene topline, trajanju prijenosa, debljini zida, te svojstvu tvari koja se izražava koeficijentom toplinske vodljivosti:

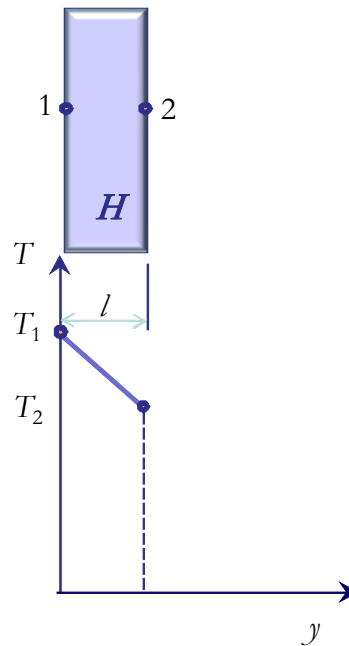
$$Q = f(\Delta T, A, t, \gamma, \lambda)$$

Ukoliko je toplinsko svojstvo materijala kroz koji se provodi toplina konstantno u promatranom

temperaturnom području, temperaturna raspodjela kroz zid će biti linearna.  $\frac{\partial T}{\partial y} = konst.$

Promjena temperature s vremenom u stacionarnim uvjetima iznosi nula:  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0.$

Kada se prijenos topline odvija samo u smjeru osi  $y$  vrijedi:  $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0.$



Slika 35. Prijenos topline kroz ravni jednoslojni zid.

Uz poznat koeficijent toplinske vodljivosti,  $\lambda$  može se odrediti količina topline koja u jediničnom vremenu prolazi kroz jediničnu površinu (gustoća toka ili fluks topline) u smjeru osi  $y$ :

$$\frac{Q}{A \cdot t} = \dot{q} = \lambda \cdot \left( -\frac{dT}{dy} \right)$$

integriranjem se dobiva:

$$\dot{q} = -\frac{\lambda}{\ell} \cdot (T_1 - T_2)$$

Gdje je:

- $\lambda$  - toplinska vodljivost,  $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$
- $\ell/\lambda$  - toplinski otpor,  $\text{m}^2 \text{K W}^{-1}$ .

Ova jednadžba naziva se *I. Fourierov zakon toplinske vodljivosti* i koristi se za određivanje količine prenesene topline u čvrstim tijelima pri stacionarnim uvjetima. Predznak minus znači da se s povećanjem udaljenosti snižava temperatura (ili obrnuto).

**Količina topline koja prolazi kroz jediničnu površinu u jediničnom vremenu direktno je proporcionalna koeficijentu toplinske vodljivosti i razlici temperatura zida, te obrnuto proporcionalna debljini zida**

Jednadžbu ( ) možemo izraziti na slijedeći način:

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{\frac{\ell}{\lambda}} = \frac{\Delta T}{R} \quad \dot{q} \left[ \frac{W}{m^2} \right]$$

Ili izraziti toplinski tok  $\dot{Q}$ :

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{\ell} \cdot A \cdot \Delta T \quad \dot{Q} [W]$$

opća definicija gustoće toka:  $\phi = \kappa \cdot \frac{\Delta}{y}$   
 gustoća toka topline:  $\dot{q} = -\lambda \cdot \frac{\Delta T}{\ell} \left[ \frac{W}{m^2} \right]$

#### 4.1.2. Stacionarna kondukcija topline kroz višeslojni zid

Ukoliko se topline vodi kroz više slojeva različitih materijala (slika ), prijelaz topline definira se prema promjeni temperature za pojedini sloj te putu koji prođe topline podijeljenim s toplinskom vodljivošću za pojedini materijal.

Fourierova jednažba može se pisati za svaki sloj pojedinačno. U stacionarnim uvjetima tok topline za svaki sloj je konstantan, ako je površina između slojeva ista  $A_1 = A_2 = A_3 = A = const.$ , gustoća toka je konstantna  $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dot{q}_3 = q = const.$

Ukupna temperaturna razlika koja je obično poznata, može se izraziti za pojedini sloj:

$$T_1 - T_2 = q \cdot \frac{l_1}{\lambda_1 A}$$

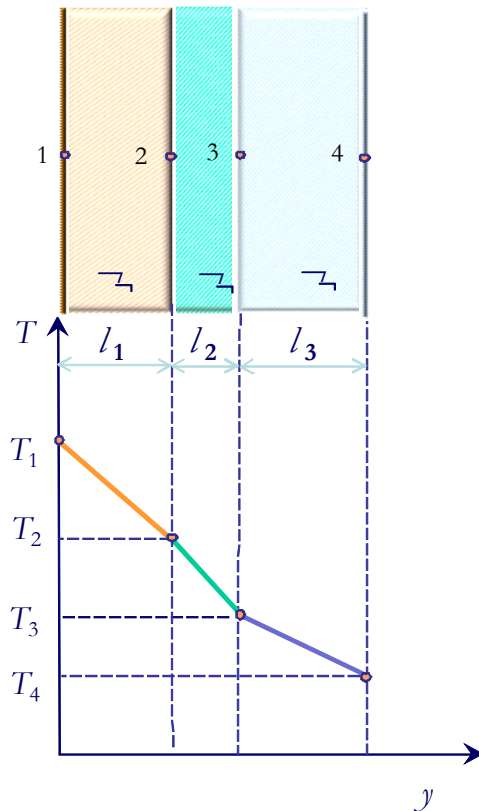
$$T_2 - T_3 = q \cdot \frac{l_2}{\lambda_2 A}$$

$$T_3 - T_4 = q \cdot \frac{l_3}{\lambda_3 A}$$

odnosno, za ukupnu temperaturnu razliku:

$$T_1 - T_4 = \frac{q}{A} \cdot \left( \frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2}{\lambda_2} + \frac{l_3}{\lambda_3} \right)$$

O toplinskoj vodljivosti pojedinog sloja temperatura koja se postigne između slojeva.



Slika 36. Prijenos topline kroz ravni višeslojni zid.

- ukupni toplinski otpor višeslojnog zida je suma pojedinačnih toplinskih otpora svakog sloja
- ako se promatra samo prijenos topline kondukcijom, ukupni otpor je:

$$\Sigma R = \frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2}{\lambda_2} + \frac{l_3}{\lambda_3}$$

**PRAVILO:**

omjer ukupnog pada temperature i ukupnog otpora, odnosi se kao omjer lokalnog pada

temperature i lokalnog otpora  $\frac{\Delta T_{uk}}{R_{uk}} = \frac{\Delta T_{lok}}{R_{lok}}$



## 4.2. Konvekcija

U ovom poglavlju raspraviti će se o prijenosu topline u fluidima i predstaviti metode za predviđanje koeficijenta prijenosa topline  $\alpha$ . Konvekcija je vrtložni mehanizam prijenosa topline, pri čemu se toplina prenosi grupama molekula. Konvekcija može biti prirodna ili prisilna.

**PRIRODNA KONVEKCIJA**, kod prirodne konvekcije do gibanja fluida dolazi zbog gravitacije ili razlike u gustoći fluida koja je posljedica različitih temperature fluida.

**PRISILNA KONVEKCIJA**, do gibanja fluida dolazi zbog vanjske sile: npr. ventilator, miješalo, pumpa

Kako je u prethodnom poglavlju rečeno, kondukcija ovisi o temperaturnom gradijentu te koeficijentu toplinske vodljivosti, dok je konvekcija funkcija temperaturne razlike između neke površine i fluida te koeficijenta prijenosa topline.

Koeficijent prijenosa topline nije fizikalno svojstvo materijala, nego ovisi o čitavom nizu parametara, uključujući svojstva fluida ali i vrstu strujanja fluida.

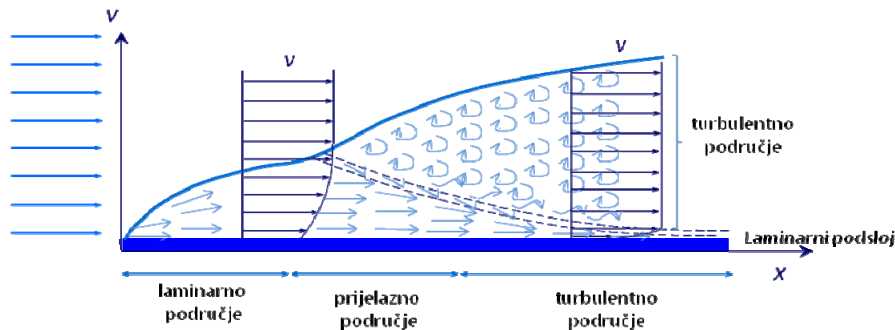
Dakle, konvekcija je složena fizikalna pojava na koju utječe veliki broj parametara:

- ✓ Fizikalna svojstva fluida:
  - ✓ toplinska vodljivost,  $\lambda$
  - ✓ temperaturna vodljivost (difuzivnost),  $a$
  - ✓ specifični toplinski kapacitet,  $c_p$
  - ✓ gustoća,  $\rho$
  - ✓ dinamička viskoznost,  $\eta$
  - ✓ kompresibilnost fluida
  - ✓ toplinska ekspanzija fluida,  $\beta$
- ✓ Geometrijske karakteristike sustava u kojem se prijenos odvija
- ✓ Hidrodinamičke karakteristike fluida koji se giba
  - ✓ Srednja brzina strujanja
  - ✓ Reynolsova značajka
  - ✓ Debljina hidrodinamičkog graničnog sloja

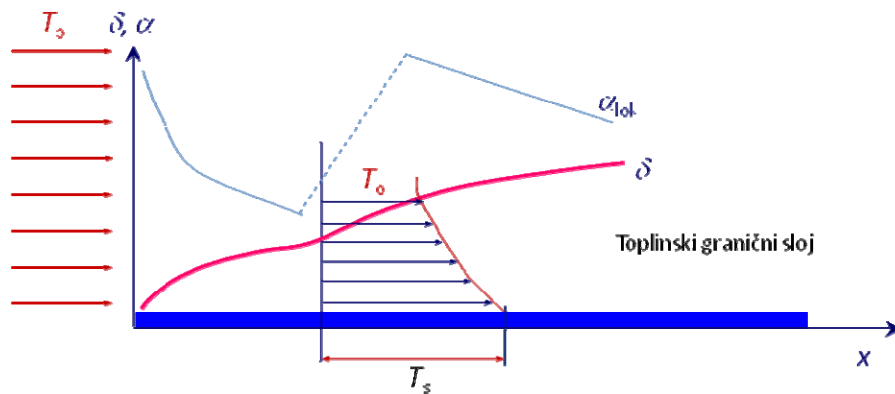
Pri zagrijavanju/hlađenju fluida koji struji, osim formiranja hidrodinamičkog graničnog sloja, dolazi do formiranja toplinskog graničnog sloja koji predstavlja glavni otpor prijenosu topline.

Ukoliko postoji razlika između čestica u struji fluida i temperature ploče koja je u kontaktu sa fluidom, na sličan način kako se formira hidrodinamički granični sloj, formirat će se i toplinski granični sloj. Čestice fluida koje su u kontaktu sa pločom postižu toplinsku ravnotežnu ovisno o

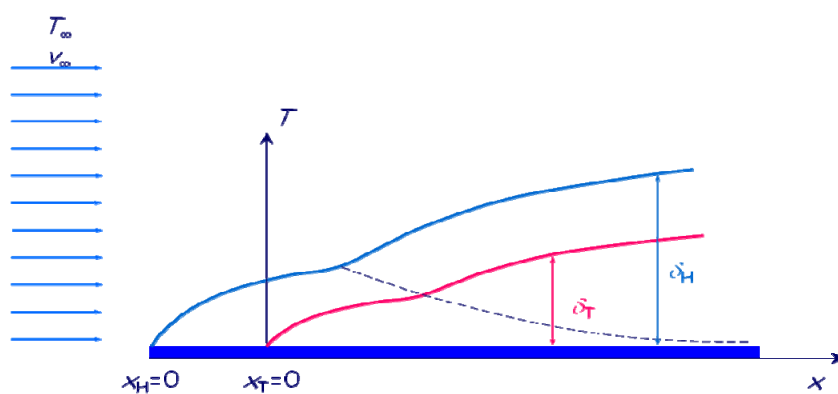
temperaturi stjenke s kojom se u kontaktu te dalje izmjenjuju energiju sa česticama oko njih. Na taj se način uspostavlja temperaturni gradijent u sloju uz čvrstu površinu.



Slika 37. Razvoj hidrodinamičkog graničnog sloja



Slika 38. Promjena debljine toplinskog graničnog sloja i lokalnog koeficijenta prijenosa topline



Slika 39. Odnos između debljine hidrodinamičkog i toplinskog graničnog sloja

Odnos između debljine hidrodinamičkog i toplinskog graničnog sloja definira se prema

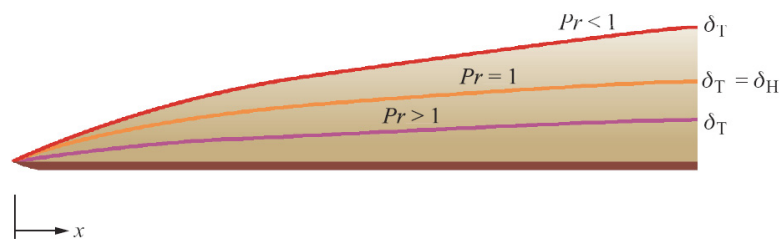
Polhausenu preko Prandtlover bezdimenzijske značajke:  $\frac{\delta_H}{\delta_T} = \text{Pr}^{1/3}$

**Prandtlova značajka** predstavlja odnos kinematičke i toplinske difuzivnosti. Može se izraziti preko Pecleove (broj koji govori o konvekcijskom prijenosu topline; predstavlja odnos topline dovedene u fluid konvekcijom i topline prenesene kondukcijom u fluidu; male vrijednosti znače da je kondukcija značajna u sustavu) i Reynoldsove značajke.

$$Pr = \frac{Pe}{Re} = \frac{\frac{v \cdot d}{a}}{\frac{v \cdot d \cdot \rho}{\eta}} = \frac{v}{a} = \frac{\eta \cdot c_p}{\lambda}$$

Prandtlova značajka može biti veća, jednaka ili manja od 1, ovisno o fizikalnim svojstvima fluida kroz koji se toplina prenosi.

$Pr > 1 \rightarrow$  hidrodinamički granični sloj veći od toplinskog (viskozne tekućine)  
 $Pr = 1 \rightarrow$  slojevi se podudaraju (plinovi)  
 $Pr \rightarrow 0 \rightarrow$  brži je prijenos topline



**Slika 40. Odnos debljina hidrodinamičkog i toplinskog graničnog sloja**

Promjenom temperature mijenjaju se i fizikalna svojstva fluida (gustoća i viskoznost) pa je brzina prijenosa topline kod kapljevinu veća kod zagrijavanja nego kod hlađenja.

#### 4.2.1. Utjecaj hidrodinamičkih uvjeta na vrijednost koeficijenta prijelaza topline

Promjenom hidrodinamičkih uvjeta mijenja se debljina hidrodinamičkog, a ukoliko dolazi do prijenosa topline, istovremeno se mijenja i debljina toplinskog graničnog sloja. Povećanjem brzine strujanja narušava se struktura graničnog sloja uz nepokretnu površinu, ulazno područje u kojem se prijenos odvija molekularnim mehanizmom se smanjuje, točka turbulencije pomiče prema početku nastajanja, a debljina graničnih slojeva, hidrodinamičkog i toplinskog, se

smanjuje. Budući da granični sloj, općenito predstavlja glavni otpor prijenosu, koeficijent prijenosa topline se smanjuje.

$$\alpha = \frac{\lambda_f}{\delta_T}$$

Povećanjem  $Re$ , smanjuje se debljina hidrodinamičkog i toplinskog graničnog sloja, dakle smanjuje se otpor prijenosu topline te povećava koeficijent prijelaza topline,  $\alpha$ .

$$\delta_H \approx \frac{1}{Re_x^m} \Rightarrow \delta_T \approx \frac{1}{Re_x^n}$$

#### 4.2.2. Načini određivanja koeficijenta prijenosa topline

Kako je već rečeno, koeficijent prijenosa topline nije fizikalno svojstvo fluida, na njega utječe i geometrija sustava te hidrodinamički uvjeti. Ti su utjecaju ugrađeni u ovaj koeficijent preko debljine toplinskog graničnog sloja, koju je teško izmjeriti, stoga je pri određivanju koeficijenta prijenosa topline potrebno koristiti određene matematičke metode (dimenzijska analiza) ili korelirati dobivene eksperimentalne podatke. **Točne analize ili metode mjerenja graničnog sloja ne postoje.**

Usporedba s općom jednačinom za gustoću toka

$$\phi = \frac{\kappa}{y} \cdot \Delta = \kappa' \cdot \Delta \rightarrow q = -\frac{\lambda}{\ell} \cdot \Delta T = -\frac{\lambda}{\delta_{Tgs}} \cdot \Delta T = \alpha \cdot \Delta T$$

Kod prijenosa topline konvekcijom najznačajnije je definirati što utječe na koeficijent prijelaza topline,  $\alpha$ :

$$\alpha = f(\rho, v, d, \eta, \lambda, \beta, c_p, T, \dots)$$

Kako je broj parametara koji utječu na koeficijent prijelaza topline velik, parametri se grupiraju u bezdimenzijske veličine.

**Nusseltova značajka** predstavlja kriterij prijenosa topline. Naziva se i bezdimenzijski koeficijent prijenosa topline. Definira odnos ukupno prenesene topline i topline prenesene kondukcijom, a poznavanje ove bezdimenzijske veličine omogućuje određivanje koeficijenta prijenosa topline,  $\alpha$ .

$$Nu = \frac{\alpha \cdot \ell}{\lambda}$$

$\lambda$  - koeficijent toplinske vodljivosti fluida, [ $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\text{K}^{-1}$ ]

$\alpha$  - koeficijenta prijenosa topline. [ $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\text{K}^{-1}$ ]

$\ell$  – duljina prijenosa topline, [m]

**Reynoldsova značajka** definira hidrodinamički režim, a predstavlja omjer sile inercije i sile trenja.

$$\text{Re} = \frac{v \cdot \ell \cdot \rho}{\eta}$$

$v$  – brzina strujanja fluida, [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ]

$\ell$  – linearna dimenzija koja definira sustav [m]

$\rho$  – gustoća fluida, [ $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ]

$\eta$  – viskoznost fluida, [Pa·s]

**Grashoffova značajka** koristi se u slučaju prirodne konvekcije kada na gibanje fluida utječe gravitacija. Ova bezdimenzijska značajka predstavlja odnos sile uzgona i sile trenja.

Veličina Gr značajke određuje mehanizam strujanja, kada sile uzgona postanu veće od sile trenja strujanje više nije laminarno.

$$\text{Gr} = \frac{\beta \cdot g \cdot \ell^3 \cdot \Delta T}{\nu^2}$$

**Rayleighova značajka** definira prijenos topline kroz fluid u slučaju prirodne konvekcije te poznavanjem kritične vrijednosti Re značajke može se odrediti da li se radi o pretežito prijenosu topline kondukcijom ili konvekcijom:

✓  $\text{Ra} < \text{Ra}_{\text{cr}} \rightarrow$  kondukcija

✓  $\text{Ra} > \text{Ra}_{\text{cr}} \rightarrow$  konvekcija.

Re značajka se definira se kao umnožak Grashoffovog i Prandtlovog broja

$$\text{Ra} = \text{Gr} \cdot \text{Pr}$$

ili

$$\text{Ra} = \frac{g \cdot \beta \cdot \ell^3}{\nu \cdot a} (T - T_{\infty})$$

gdje je

$\ell$  - karakteristična dužina, [m]

$g$  - gravitacijsko ubrzanje, [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ]

$\beta$  - je koeficijent širenja,

$T$  – temperatura na površini čvrstog tijela, [K]

$T_{\infty}$  – temperatura u masi fluida, [K]

$\rho$  - gustoća, [kg·m<sup>-3</sup>]

$\nu$  - kinematička viskoznost, [m·s<sup>-2</sup>]

$a$  - koeficijent temperaturne vodljivosti [m·s<sup>-2</sup>]

**Stantonova značajka** koristi se pri prijenosu topline prisilnom konvekcijom i predstavlja odnos topline prenesene fluidu i toplinskog kapaciteta.

$$St = \frac{Nu}{Re \cdot Pr} = \frac{\alpha}{\rho \cdot c_p \cdot \nu}$$

Uz pomoć korelacijskih jednadžbi izražava se Nusseltov broj, Nu, kao funkcija karakterističnih bezdimenzijskih značajki: Reynoldsa (Re), Grashofa (Gr), Prandtla (Pr), Pecleta (Pe), Rayleigha (Ra) i dr. Ovisno o uvjetima provedbe procesa, veličine koje utječu na proces mogu se u korelacijskim jednadžbama izraziti u obliku simpleksa (npr. utjecaj temperature na fizikalna svojstva fluida ili geometrijske karakteristike sustava).

#### 4.2.3. Korelacijske jednadžbe pri prijenosu topline

Korelacijske jednadžbe izvede se na temelju eksperimentalnih podataka i dimenzijske analize, definiraju se za prijenos topline ili prijenos tvari, a na njih utječu, osim fizikalnih svojstava fluida i uvjeti strujanja, odnosno geometrija sustava.

Najčešće korištena korelacijska jednadžba za **konvekcijski prijenos topline** kod **laminarnog strujanja** je SIEDER-TATE-ova jednadžba

$$Nu = 1,86 \cdot \left( Re \cdot Pr \cdot \frac{d}{\ell} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left( \frac{\eta}{\eta_s} \right)^{0,14}$$

Gdje je:

$\frac{\eta}{\eta_s}$  - odnos viskoznosti u masi fluida te uz stjenku.

Naime zbog sporog prijenosa topline, razlikuju se viskoznosti uz stjenku i u masi fluida.

Prijelaz topline pri izrazito turbulentnom toku kroz cijev koristi se DITTUS-BOELTER-ova jednadžba:

$$Nu = 0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^n$$

uz uvjete:

- ✓  $n=0.4$  za grijanje,  $n=0.3$  za hlađenje
- ✓ svojstva fluida definirana su za srednju aritmetičku temperaturu
- ✓  $5000 < Re < 200\ 000$
- ✓  $0.7 < Pr < 50$
- ✓  $\ell/D > 50$

Za **ulazno područje** gdje strujanje još nije u potpunosti razvijeno **NUSSELT** je dao izraz:

$$Nu = 0,036 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{1/3} \cdot \left(\frac{d}{l}\right)^{0,055}$$

$\frac{d}{l}$  - geometrijski simpleks koji se uzima u obzir zbog prijenosa topline u ulaznom području gdje je zona uspostavljanja toka, a samim time i udio molekularnog prijenosa veći.

Ovdje su navedene samo tri korelacijske jednadžbe, tipične za pojedine uvjete strujanja u cijevi, međutim u literaturi postoji čitav niz korelacijskih jednadžbi koje pokrivaju različitu geometriju sustava i različite hidrodinamičke uvjete strujanja.

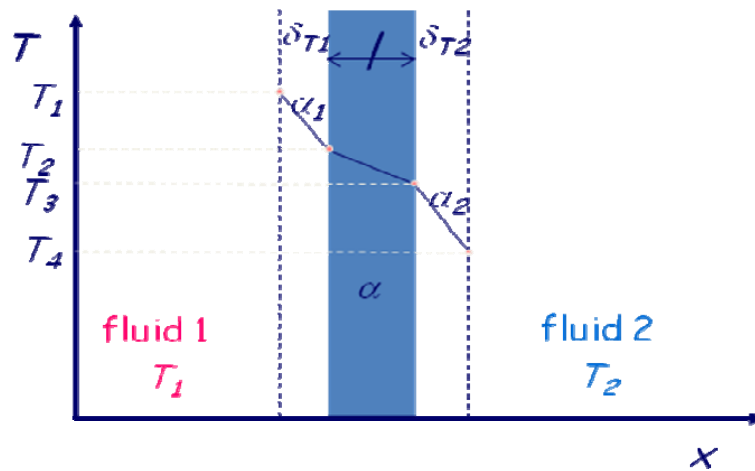
*Kako odabrati prikladnu korelacijsku jednadžbu:*

1. Iz opisa fizikalnog modela procjenjuje se uzrok gibanja fluida, na osnovu čega se problem razvrstava ili u prisilnu ili u slobodnu konvekciju.
2. Izbor prikladne formule vrši se u skladu sa zadanim geometrijskim oblikom fizikalnog modela:
  - a) Da bi se odredio oblik strujanja (laminaran ili turbulentan) najprije se prema propisanoj referentnoj temperaturi uzimaju fizikalna svojstva fluida iz toplinskih tablica.
  - b) Izračuna se Pr broj.
  - c) U skladu s uzrokom strujanja izračuna se:
    - Re broj, ako se radi o prisilnoj konvekciji, ili
    - Gr broj, ako se radi slobodnoj konvekciji.
  - d) Zatim se procjenjuje oblik strujanja prema propisanom kriteriju :
    - za prisilno strujanje:  $Re < Re_k$  laminarno, ili  $Re > Re_k$  turbulentno.
    - za slobodnu konvekciju:  $GrPr < (GrPr)_k$  laminarna, ili  $GrPr > (GrPr)_k$  turbulentna.

U općem slučaju taj postupak ne dovodi do jednoznačnog izbora formule, već je potrebno provjeriti daljnje kriterije koji su navedeni uz takav model, odnosno pripadnu formulu.

4.2.4. Prolaz topline

Pojam prolaz topline označava prijenos topline s jednog fluida na drugi kroz stjenku, kako je prikazano na slici\_\_\_.



Slika 41. Prolaz topline sa jednog fluida na drugi kroz čvrsti sloj

Ovisno o slojevima kroz koje toplina prolazi, mogu se definirati otpori prijenosu topline koji su važni za određivanje gustoće toka topline. Pri tome važno je voditi računa da li se toplina provodi kroz čvrsti sloj ili fluid. Za primjer prikazan na slici, može se odrediti koeficijent prolaza topline koji je recipročna vrijednost sume svih otpora kroz koje toplina prolazi:

$$K = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}\right)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n R}$$

Tako se za više toplinskih otpora u stacionarnom sustavu može odrediti gustoća toka topline:

$$q = \frac{\Delta T_{uk}}{\sum_{i=1}^n R}$$

Prijelaz topline s fluida 1 na stjenku:  $q = \alpha_1 \cdot (T_1 - T_2)$

Kondukcija kroz stjenku:  $q = \frac{\lambda}{l} \cdot (T_2 - T_3)$

Prijelaz topline sa stjenke na fluid 2:  $q = \alpha_2 \cdot (T_3 - T_4)$

Ako je q=konst. (proces stacionaran):  $q \cdot \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}\right) = (T_1 - T_4)$

te gustoća toka topline iznosi:



$$q = \frac{(T_1 - T_4)}{\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}\right)} = \frac{\Delta T_{uk}}{\sum_{i=1}^n R}$$

Ako se gustoća toka topline pomnoži sa površinom kroz koju se odvija prijenos topline, dobije se kinetička jednadžba toka topline:

$$Q = q \cdot A = K \cdot A \cdot \Delta T$$

U jednadžbi ( $Q$ ),  $A$  je površina prijelaza topline, a  $\Delta T$  je pokretačka sila procesa.

$$R_{konvekcijski} = \frac{1}{\alpha} \quad R_{kondukcijski} = \frac{\ell}{\lambda}$$

$\alpha$  - koeficijent prijelaza topline, [ $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$ ]

$\lambda$  - koeficijent toplinske vodljivosti, [ $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ ]

Budući da IT postoje u različitim geometrijskim izvedbama, **mjerodavna površina izmjene topline** određuje se za:

- ✓ ravne stjenke

tada je površina ista s obje strane stjenke i nije problem odrediti površinu izmjene.

- ✓ zakrivljena površina (cijev)

tada se u proračun uzima površina na strani fluida koji pruža veći otpor prijenosu topline. Ako je vrijednosti koeficijenta prolaza topline slična na obje strane, potrebno je uzet srednja vrijednost površine izmjene topline.

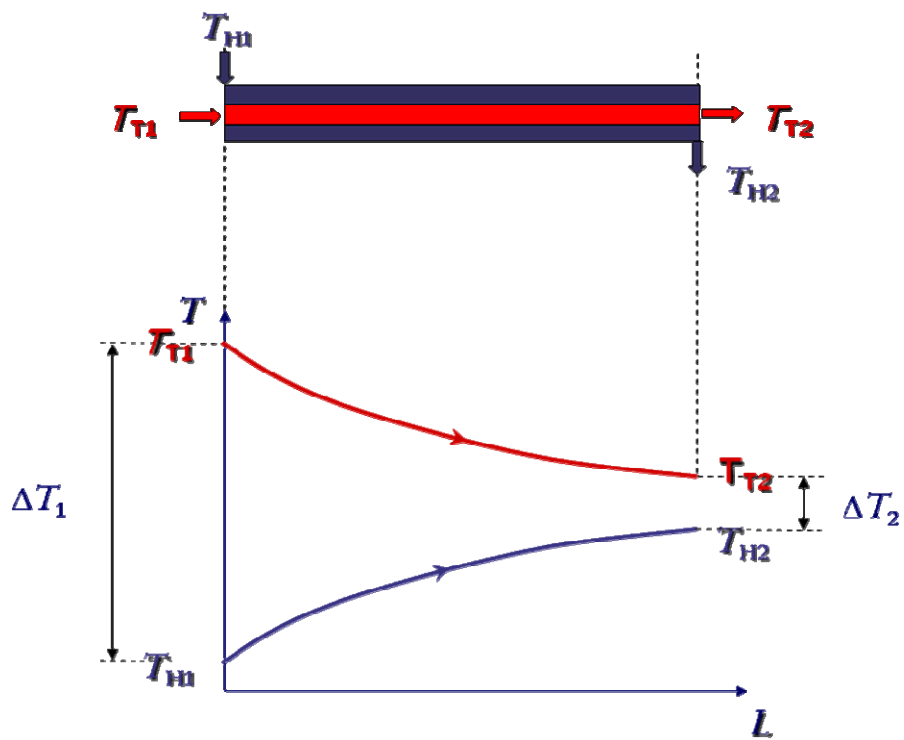
**Pokretačka sila izmjene topline** - temperaturna razlika između toplog i hladnog fluida mijenja se od ulaza do izlaza IT te je potrebno definirati mjerodavnu razliku temperatura. Temperature toplog i hladnog fluida mjere se uobičajeno na mjestu ulaza i izlaza te ovisno o vrsti izmjenjivača određuje aritmetička ili logaritamska srednja vrijednost između pokretačke sile na jednoj, odnosno drugoj strani IT.

Izraz za srednju aritmetičku vrijednost pokretačke sile:

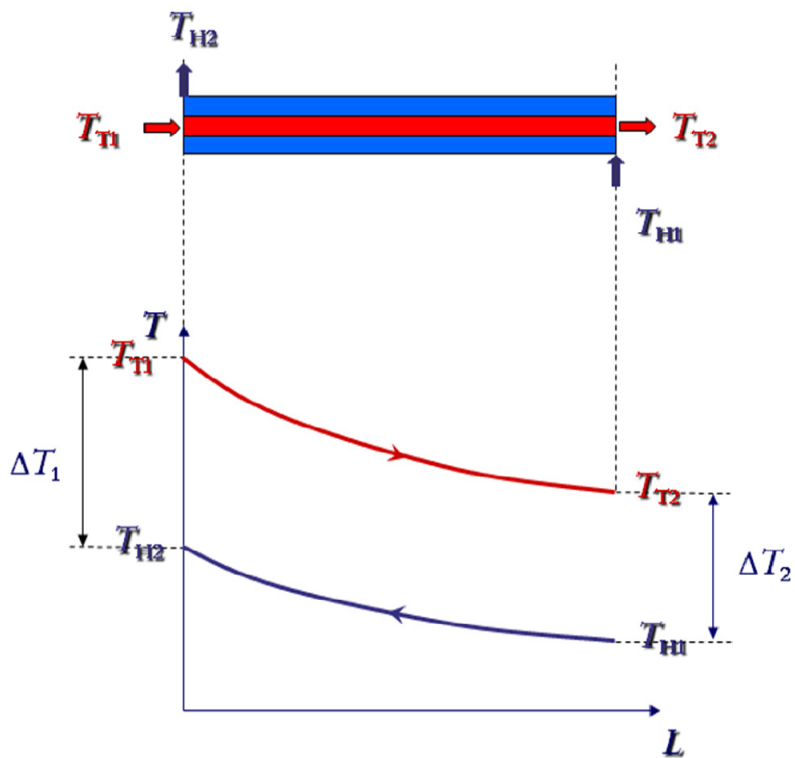
$$\Delta T_{lm} = \frac{\Delta T_2 + \Delta T_1}{2}$$

Izraz za srednju logaritamsku vrijednost pokretačke sile:

$$\Delta T_{lm} = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln\left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}\right)}$$



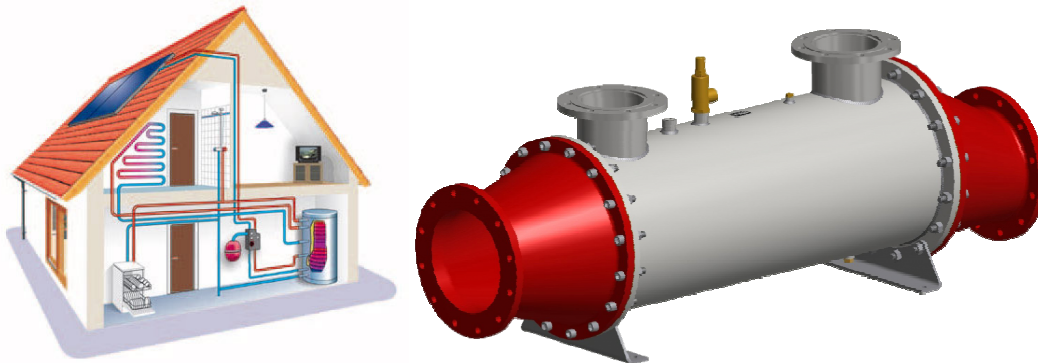
Slika 42.  $T-L$  dijagrami - istostrujni tok fluida



Slika 43.  $T-L$  dijagrami - protustrujni tok fluida

### 4.3. Izmjenjivači topline

**Izmjenjivač topline** je uređaj namijenjena prolazu topline s jednog medija na drugi, a može biti izveden da se mediji dodiruju, ili da su odvojeni pregradom koja sprječava njihov izravni kontakt. Njihova je upotreba vrlo rasprostranjena, od kućnih grijača i hladnjaka, automobilskih rashladnika, industrijskih izmjenjivača.



**Slika 44. Primjena izmjenjivača topline u kućanstvu i industriji**

<http://www.dom-projekt.hr/solarni-sustavi>

<http://www.ejbowman.co.uk/products/ExhaustGasHeatExchangers.htm>

#### 4.3.1. Podjela izmjenjivača

Izmjenjivači topline koji se primjenjuju za različite industrijske namjene, mogu se podijeliti na više načina.

Jedan od načina je **prema namjeni** gdje ih dijelimo na:

- ✓ hlađenje fluida (procesnih struja)
- ✓ kondenzacija pare iz procesa
- ✓ isparavanje kapljevine iz procesa
- ✓ odvođenje topline iz procesa i predgrijavanje
- ✓ rekuperaciju topline
- ✓ hlađenje kompresora, turbina, motora

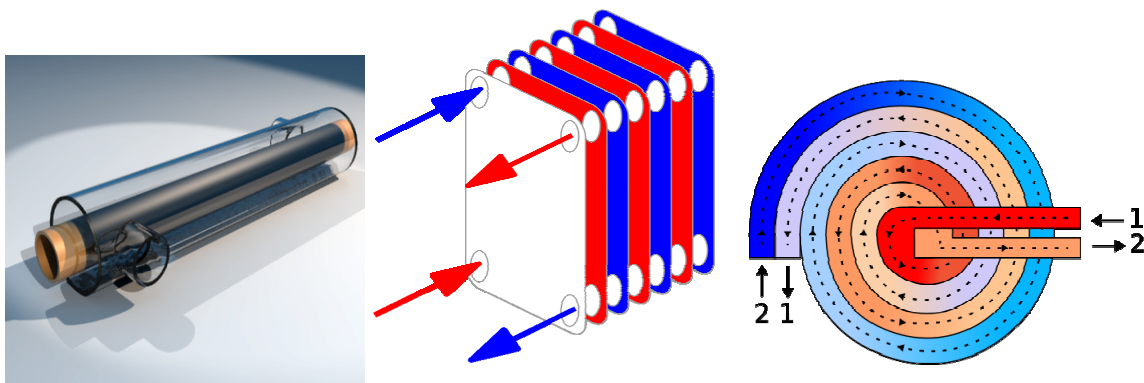
Iako njihova primjena često određuje konstrukciju, možemo ih podijeliti i prema **načinu izvedbe**:

- ✓ cijevni
- ✓ pločasti
- ✓ spiralni

CIJEVNI izmjenjivači topline su najznačajniji predstavnici izmjenjivača topline. Sastoje od cijevnog snopa, plašta te glave izmjenjivača. U cijevnom snopu izmjenjivača cijevi se ugrađuju na više načina u odnosu na smjer toka fluida. imaju postavljene cijevi unutar plašta. Snop tih cijevi sadrži fluid koji se mora hladiti ili zagrijavati. Drugi fluid struji preko cijevi koje se griju ili hlade tako da može dati ili primiti određenu količinu topline.

PLOČASTI IT - Načinjen je od mnogo tankih ploča između kojih struji topli i hladni fluid. Kao i cijevnom IT, fluidi mogu strujati istostrujno ili protustrujno. Ploče, od kojih je sačinjen IT, mogu biti izvedene sa različitim orebrenjima, što im povećava kontaktnu površinu. Ovisno o namjeni, snopovi ploča mogu se dodavati ili oduzimati te na taj način mijenjati kapacitet IT. Ovaj oblik naslaganih ploča može biti bolje iskoristiv u zadanom prostoru, od izmjenjivača cijev u plaštu.

SPIRALNI IT - sastoje se od cijevnog snopa spiralno oblikovanih bešavnih cijevi smještenih u kućište cilindričnog oblika. Na ovaj način se velika površina za izmjenu topline smješta u relativno ograničen volumen. Oblik cijevi osigurava dobru turbulenciju toka fluida i time bolji prijenos topline. Cijevi se mogu nesmetano toplinski rastezati, a da ne dođe do većih unutarnjih napreznaja.

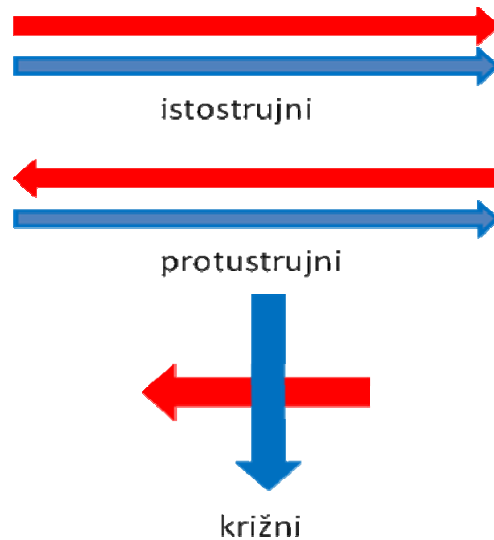


Slika 45. Izmjenjivači topline različitih izvedbi: cijevni, pločasti i spiralni

[https://hr.wikipedia.org/wiki/Izmjenjiva%C4%8D\\_topline](https://hr.wikipedia.org/wiki/Izmjenjiva%C4%8D_topline)

Izmjenjivači topline se mogu podijeliti i prema **načinu strujanja fluida**. Prema toj podjeli postoje tri vrste izmjenjivača:

- ✓ istostrujni izmjenjivači topline
- ✓ protustrujni izmjenjivači
- ✓ križni izmjenjivači topline



Slika 46. Međusobni tok strujanja fluida kod izmjenjivača s jednim prolazom

Fluidi u **istostrujnom izmjenjivaču topline** prolaze kroz izmjenjivač paralelnim tokom. Dakle, oba fluida ulaze na istoj strani IT te struje paralelno prema drugom kraju. Pokretačka sila na jednom kraju je maksimalna (na mjestu ulaza fluida), a na drugom minimalna (na mjestu izlaza fluida).

U **izmjenjivačima s protustrujnim tokom fluida**, fluidi ulaze u izmjenjivač na suprotnim krajevima te su u kontaktu hladna struja na ulazi i topla na izlazu. Ovakva konstrukcije IT i kontakt između toplog i hladnog fluida osigurava podjednaku pokretačku silu kroz cijeli IT što pogoduje djelotvornosti IT.

U **križnom izmjenjivaču topline**, fluidi struje okomito jedan na drugoga kroz izmjenjivač

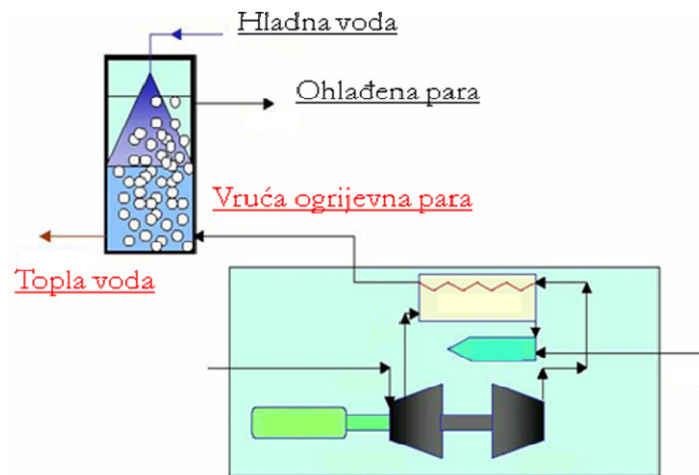
Prema **mehanizmu** prijenosa topline:

- ✓ konvekcijom,
- ✓ kondukcijom,
- ✓ radijacijom

Ovu podjelu je teško strogo razdvojiti jer se sva tri prijenosa uglavnom odvijaju istovremeno. Međutim, podjela se odnosi na prevladavajući mehanizam prijenosa.

Da li su fluidi u direktnom kontaktu

- ✓ direktni kontakt
- ✓ indirektni kontakt (preko površine stjenke)



Slika 47. Direktni izmjenjivač topline za zagrijavanje vode

Kod direktnih izmjenjivača topline se prolaz topline između tople i hladne struje odvija bez razdjelne površine. Većina izravnih izmjenjivača topline spadaju pod kategoriju plin-kapljevina gdje se toplina prenosi između plina i kapljevine u obliku kapljica, tankih slojeva ili mlazeva.

#### 4.3.2. Proračun izmjenjivača topline

Pri stacionarnim uvjetima pretpostavlja se da fluidi protječu konstantnom brzinom pri konstantnom tlaku i da nema geodetske razlike visine od ulaza do izlaza iz izmjenjivača, zanemaruje se toplina miješanja i kemijske reakcije te se bilanca energije za promatrani fluid u izmjenjivaču svodi se na opću jednadžbu za očuvanje energije (bilancna jednadžba topline) koja se može izraziti:

$$\dot{Q} = \dot{m} \cdot c_p (T_{iz} - T_{ul})$$

Odnosno bilancna jednadžba za hladni fluid:  $\dot{Q}_H = \dot{m}_H \cdot c_{p,H} \cdot (T_{H,iz} - T_{H,ul})$

ili topli fluid:  $\dot{Q}_T = \dot{m}_T \cdot c_{p,T} \cdot (T_{T,ul} - T_{T,iz})$

Gdje je:

$\dot{Q}$  količina prenesene topline, [W]

$\dot{m}$  maseni protok, [kg s<sup>-1</sup>]

$c_p$  specifični toplinski kapacitet, [J kg<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>]

$T$  temperatura, [K ]

Umnožak specifičnog toplinskog kapaciteta i masenog protoka predstavlja vodenu vrijednost fluida (vodeni ekvivalent ili kapacitivna brzina),  $C$ .

$$C = \dot{m} \cdot c_p$$

Postavivši bilancu za topli, odnosno hladni fluid u IT može se pretpostaviti da nema gubitaka topline, pa vrijedi:  $\dot{m}_H \cdot c_{p,H} \cdot \Delta T_H = \dot{m}_T \cdot c_{p,T} \cdot \Delta T_T$

$$\frac{C_H}{C_T} = \frac{\Delta T_T}{\Delta T_H}$$

To znači da će fluid s manjom vodenom vrijednošću imati veću temperaturnu promjenu u izmjenjivaču., npr.:

$$\Delta T_T > \Delta T_H \rightarrow C_T < C_H$$

Toplinski tok za svaki fluid može se izraziti toplinsko-bilancnom jednadžbom, a za toplinski tok koji se izmjenjuje između toplog i hladnog fluida toplinsko kinetičkom jednadžbom:

$$\dot{Q} = K \cdot A \cdot \Delta T_{LM}$$

$\dot{Q}$  količina prenesene topline, [W]

$K$ , koeficijent prolaza topline, [W m<sup>-2</sup> K<sup>-1</sup>]

$A$ , površina izmjene topline, [m<sup>2</sup>]

$\Delta T_{lm}$  pokretačka sila procesa, [K ]

#### 4.3.3. Izmjenjivači topline složene geometrije

Izmjenjivači topline, kao i svi uređaji izrađuju se da bi bili što ekonomičniji. Kod izmjenjivača topline to znači da imaju što veću površinu izmjene topline smještenu u što manji volumen, te što veći koeficijent prijelaza topline. Koeficijent prijenosa topline može se povećati poboljšanjem hidrodinamičkih uvjeta. Da bi se IT povećala kontaktna površina, a time i toplina koju je moguće izmjeniti konstruiraju se IT složene geometrije.

Kako su izmjenjivači složene geometrije konstruirani tako da imaju više prolaza fluida kroz cijevi, istovremeno su prisutni istostrujni, protustrujni tokovi te križni tok. U tim slučajevima kinetičku jednadžbu je složenije izraziti jer se pokretačka sila procesa ne može izraziti samo kao protustrujna (što je uobičajeno za IT složene geometrije). Zbog toga se u kinetičku jednadžbu uvodi korekcijski factor,  $F$  čija je vrijednost:  $0 < F < 1$ .

$$Q = K \cdot A \cdot \Delta T_{LM} \cdot F$$

$F$  je korekcijski faktor koji korigira složenu geometriju i omogućava korištenje jednostavnog izraza za tok topline:

Za izračunavanje bezdimenzijskih omjera  $P$  i  $R$  potrebno je poznavanje ulaznih i izlaznih temperatura oba fluida  $F=f(P, R, \text{geometrija})$ .

Gdje je  $R$  jednak omjeru kapacitivnih brzina:

$$R = \frac{\Delta T_{\text{plasti}}}{\Delta T_{\text{cijevi}}}$$

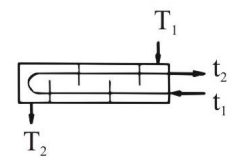
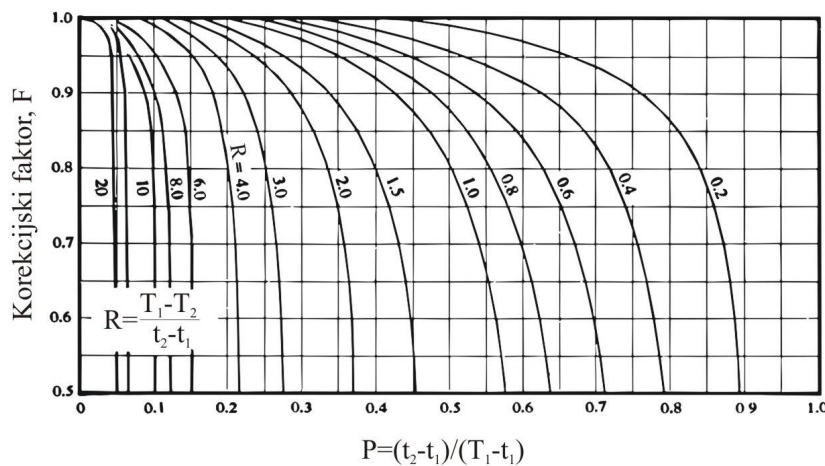
a parametar  $P$  je jednak toplinskoj efikasnosti fluida u cijevi:

$$P = \frac{\Delta T_{\text{cijevi}}}{\Delta T_{\text{max}}}$$

Ako je  $F < 0,75$  konstrukcija izmjenjivača topline nije dobra.

Za različite geometrije izmjenjivača postoje dijagrami iz kojih se uz poznate parametre  $P$  i  $R$  može očitati korekcijski faktor  $F$ .

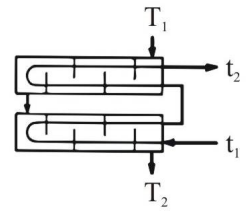
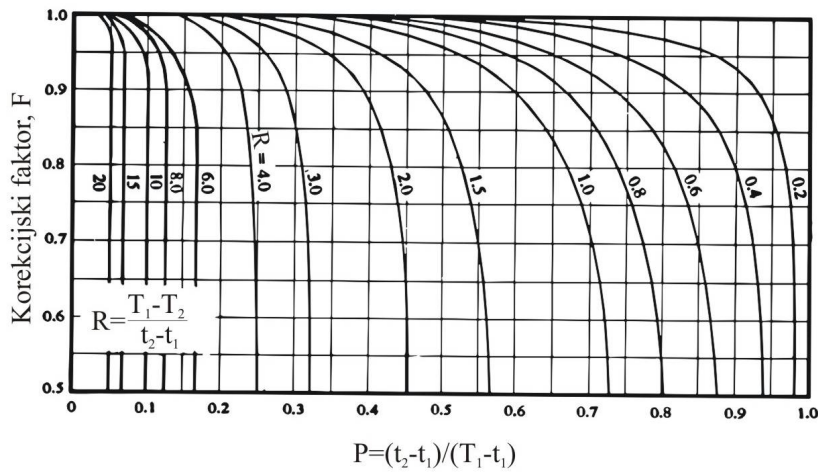
*Izmjenjivač topline tipa 1-2*



**Slika 48. Graf za određivanje korekcijskog faktora IT tipa 1-2**

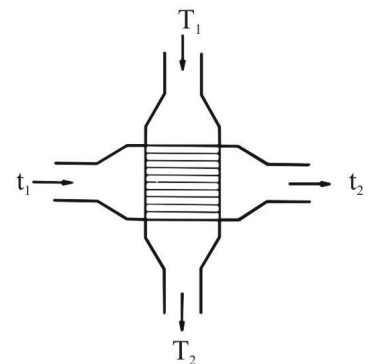
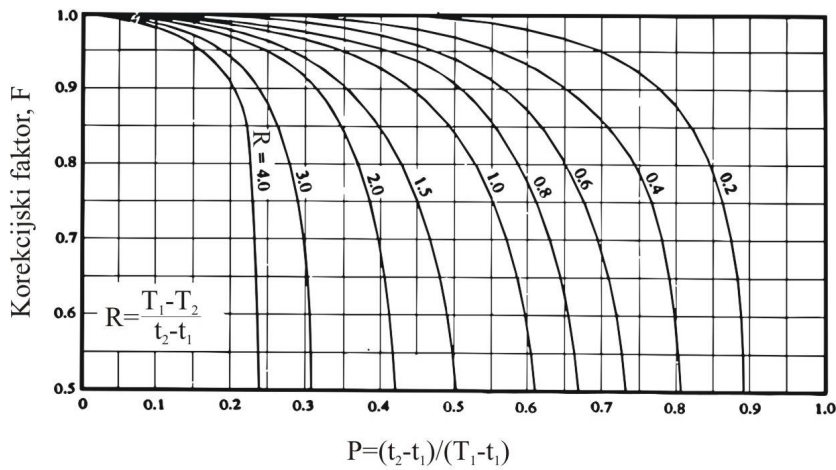


Izmjenjivač topline tipa 2-4



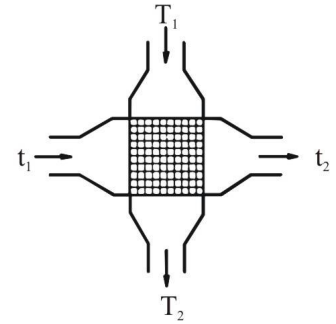
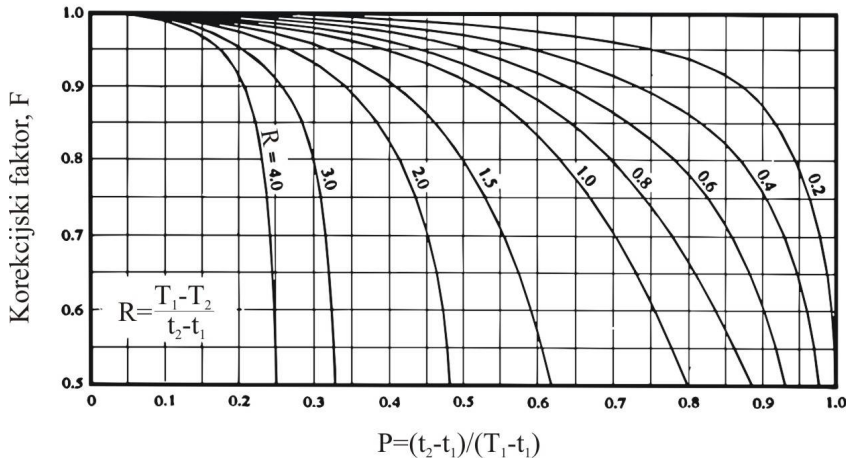
Slika 49. Graf za određivanje korekcijskog faktora IT tipa 2-4

Križni izmjenjivač topline - jedan fluid miješan



Slika 50. Graf za određivanje korekcijskog faktora IT križnog tipa – jedan fluid nemiješan

Križni izmjenjivač topline bez miješanja fluida



Slika 51. Graf za određivanje korekcijskog faktora IT križnog tipa – bez miješanja

Djelotvornost IT može se definirati omjerom izmijenjene količine topline te maksimalne topline koju je moguće izmijeniti:

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}_{stvarna}}{\dot{Q}_{max}}$$

Gdje se stvarno izmijenjena topline izračunava preko izmijenjene topline fluida sa minimalnom vodenom vrijednošću ili maksimalno postignutom temperaturnom razlikom:

$$\dot{Q}_{stvarna} = C_{min} \cdot \Delta T$$

Maksimalna topline koju je u sustavu moguće izmijeniti:

$$\dot{Q}_{max} = C_{min} \cdot \Delta T_{max} = C_{min} \cdot (T_{T,ul} - T_{H,ul})$$

Djelotvornost se može izraziti:

$$\varepsilon = \frac{C_{min} \cdot \Delta T}{C_{min} \cdot \Delta T_{max}}$$

ili preko razlike temperatura:

$$\varepsilon = \frac{\Delta T}{\Delta T_{max}}$$

Gdje je:

$\Delta T$  razlika temperatura na ulazu i izlazu fluids sa minimalnom vodenom vrijednosti [K]

$\Delta T_{max}$  maksimalno moguća razlika temperatura u sustavu (temperatura toplog i hladnog na ulazu) [K]

Kod jednostavnog izmjenjivača topline tipa 1-1 s istostrujnim tokom fluida, djelotvornost se može izračunati:

$$\text{za } C_H < C_T: \varepsilon_H = \frac{\Delta T_H}{\Delta T_{\max}}$$

$$\text{za } C_T < C_H: \varepsilon_T = \frac{\Delta T_T}{\Delta T_{\max}}.$$

#### 4.3.4. Proračun izmjenjivača topline pomoću toplinskog stupnja djelovanja

Kada nisu poznate ulazne i izlazne temperature fluida, vrlo je složeno izračunavanje srednje logaritamske razlike temperature. U tom slučaju primjenjuje se alternativna metoda za izračunavanje ukupne količine prenesene topline, koja naglašava individualne učinke ne samo ukupne toplinske vodljivosti  $KA$  već i kapacitivne brzine. Ova metoda počinje s definiranjem dvije bezdimenzijske značajke: broj jedinica prijenosa topline (NTU) i djelotvornost IT ( $\varepsilon$ )

**Broj jedinica prijenosa topline**, NTU (*engl. Number Transfer Unit*) je mjera veličine izmjenjivača topline, direktno je u funkciji površine izmjene topline, odnosno geometrijskih karakteristika, ali i hidrodinamičkih karakteristika koje određuju  $K$  i  $C_{\min}$

Izjednačavanjem bilancne i kinetičke jednadžbe za tok topline:  $C_{\min} \cdot \Delta T = K \cdot A \cdot \Delta T_{lm} \cdot F$ , mogu se dobiti izrazi za broj jedinica prijenosa, NTU:

$$NTU = \frac{K \cdot A}{C_{\min}} = \frac{\Delta T}{\Delta T_{lm} \cdot F}$$

**Djelotvornost izmjenjivača topline**,  $\varepsilon$  može se definirati omjerom izmijenjene količine topline te maksimalne topline koju je moguće izmijeniti:

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}_{st\ varna}}{\dot{Q}_{\max}}$$

Gdje se stvarno izmijenjena toplina izračunava preko izmijenjene topline fluida sa minimalnom vodenom vrijednošću ili maksimalno postignutom temperaturnom razlikom:

$$\dot{Q}_{st\ varna} = C_{\min} \cdot \Delta T.$$

Maksimalna toplina koju je u sustavu moguće izmijeniti:

$$\dot{Q}_{\max} = C_{\min} \cdot \Delta T_{\max} = C_{\min} \cdot (T_{T,ul} - T_{H,ul}).$$

Djelotvornost se može izraziti:

$$\varepsilon = \frac{C_{\min} \cdot \Delta T}{C_{\min} \cdot \Delta T_{\max}}$$

ili preko razlike temperatura:

$$\varepsilon = \frac{\Delta T}{\Delta T_{\max}}$$

Gdje je:

$\Delta T$  razlika temperatura na ulazu i izlazu fluids sa minimalnom vodenom vrijednosti [K]

$\Delta T_{\max}$  maksimalno moguća razlika temperatura u sustavu (temperatura toplog i hladnog na ulazu) [K]

Kod jednostavnog izmjenjivača topline tipa 1-1 s istostrujnim tokom fluida, djelotvornost se može izračunati:

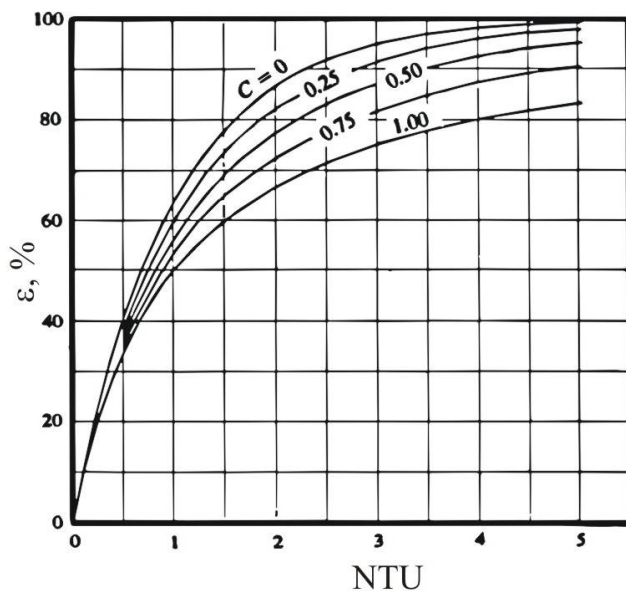
$$\text{za } C_H < C_T: \varepsilon_H = \frac{\Delta T_H}{\Delta T_{\max}}$$

$$\text{za } C_T < C_H: \varepsilon_T = \frac{\Delta T_T}{\Delta T_{\max}}$$

**Grafovi za određivanje broja jedinica prijenosa topline (NTU) i djelotvornost IT ( $\varepsilon$ )**

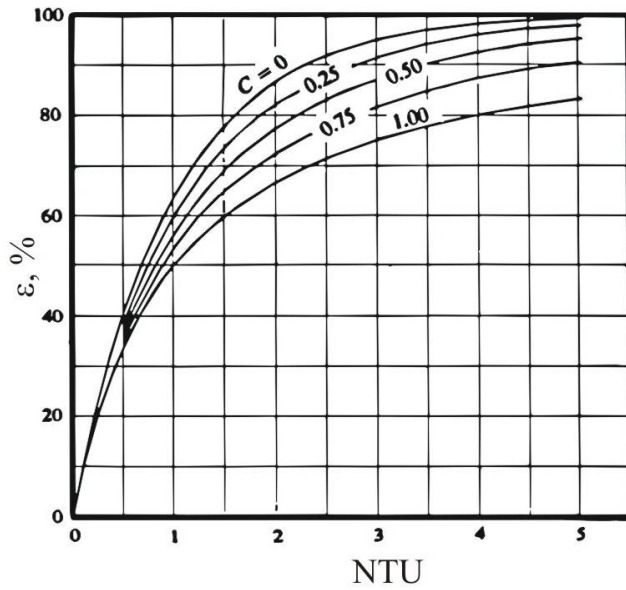
*Grafički prikaz odnosa  $\varepsilon - NTU$  za jednostruki istostrujni izmjenjivač topline*

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp[-NTU \cdot (1 + C)]}{1 + C}$$



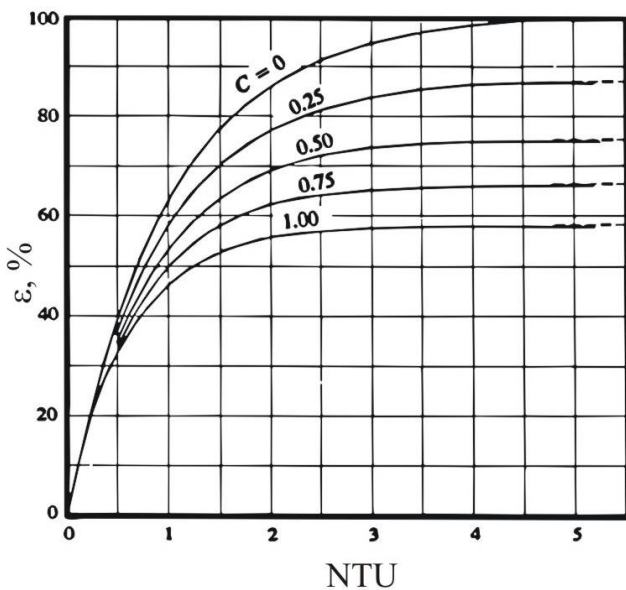
**Slika 52. Grafički prikaz odnosa  $\varepsilon - NTU$  za jednostruki istostrujni izmjenjivač topline**

$$\varepsilon = \frac{1 - e^{-(NTU \cdot (1-C))}}{1 - C \cdot e^{-(NTU \cdot (1-C))}}$$



Slika 53. Grafički prikaz odnosa  $\epsilon$  – NTU za jednostruki protustrujni izmjenjivač topline

$$\epsilon_1 = 2 \cdot \left[ 1 + C + \frac{1 + e^{-\left(NTU \cdot \sqrt{1+C^2}\right)}}{1 - e^{-\left(NTU \cdot \sqrt{1+C^2}\right)}} \cdot \sqrt{1 + C^2} \right]^{-1}$$

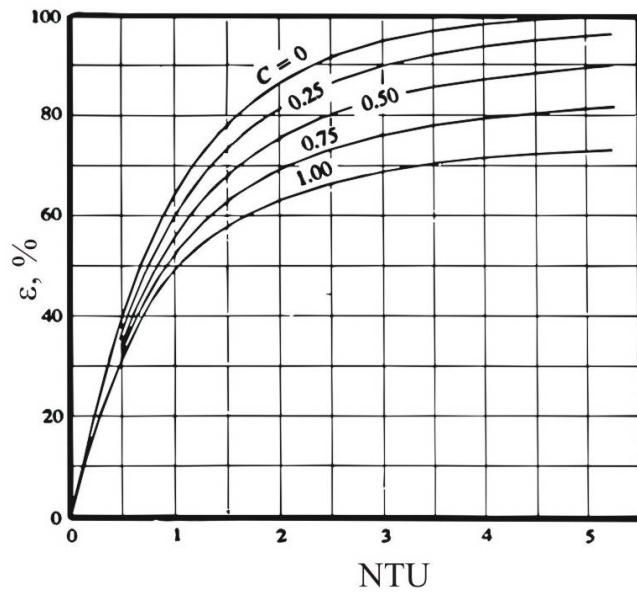


Slika 54. Grafički prikaz odnosa  $\epsilon$  – NTU za izmjenjivač topline tipa 1-2

$$\epsilon_1 = 2 \cdot \left[ 1 + C + \frac{1 + e^{-\left(NTU \cdot \sqrt{1+C^2}\right)}}{1 - e^{-\left(NTU \cdot \sqrt{1+C^2}\right)}} \cdot \sqrt{1 + C^2} \right]^{-1}$$

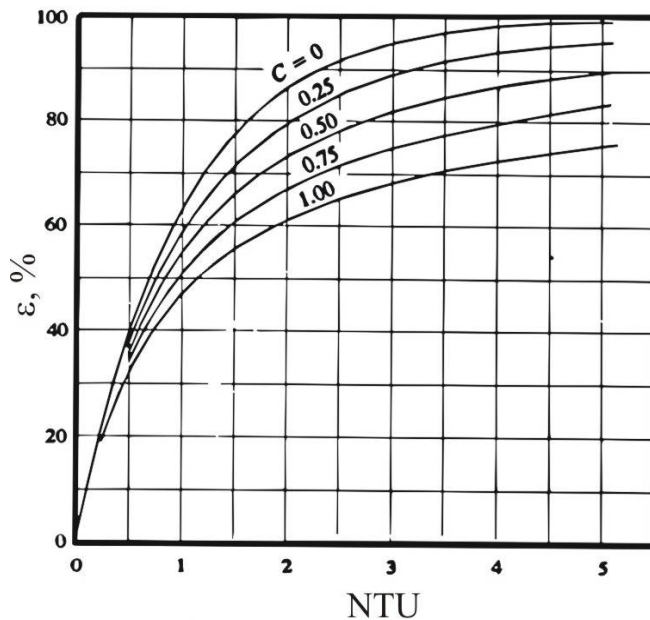
Ili  $n$  prolaza kroz plašt  $2n$ ,  $4n$ ,  $6n$  prolaza kroz cijev

$$\varepsilon_n = \left[ \left( \frac{1 - \varepsilon_1 \cdot C}{1 - \varepsilon_1} \right)^n - 1 \right] \cdot \left[ \left( \frac{1 - \varepsilon_1 \cdot C}{1 - \varepsilon_1} \right)^n - C \right]^{-1}$$



Slika 55. Grafički prikaz odnosa  $\varepsilon - NTU$  za izmjenjivač topline tipa 2-4

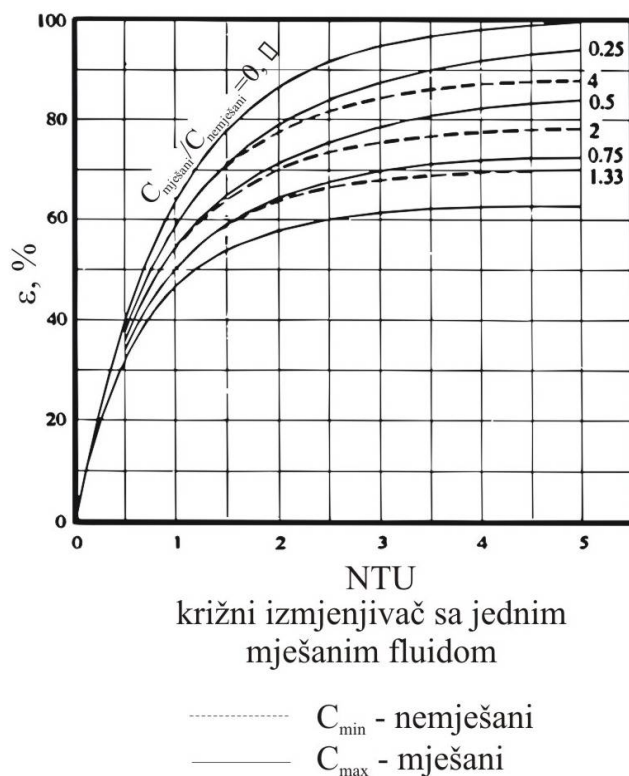
$$\varepsilon \approx 1 - \exp\left\{ C \cdot (NTU)^{0,22} \cdot \left[ \exp\left[-C \cdot (NTU)^{0,78}\right] - 1 \right] \right\}$$



Slika 56. Grafički prikaz odnosa  $\varepsilon - NTU$  za izmjenjivač topline s križnim tokom - nemiješani tok fluida

$$C_{\min} \text{ neumiješani } \varepsilon = C \cdot \{ 1 - \exp[-C \cdot [1 - \exp(-NTU)]] \}$$

$$C_{\max} \text{ neumiješani } \varepsilon = 1 - \exp\{-C \cdot [1 - \exp(- (NTU \cdot C))]\}$$



Slika 57. Grafički prikaz odnosa  $\varepsilon - NTU$  za izmjenjivač topline s križnim tokom - miješani tok fluida

#### 4.4. Zračenje

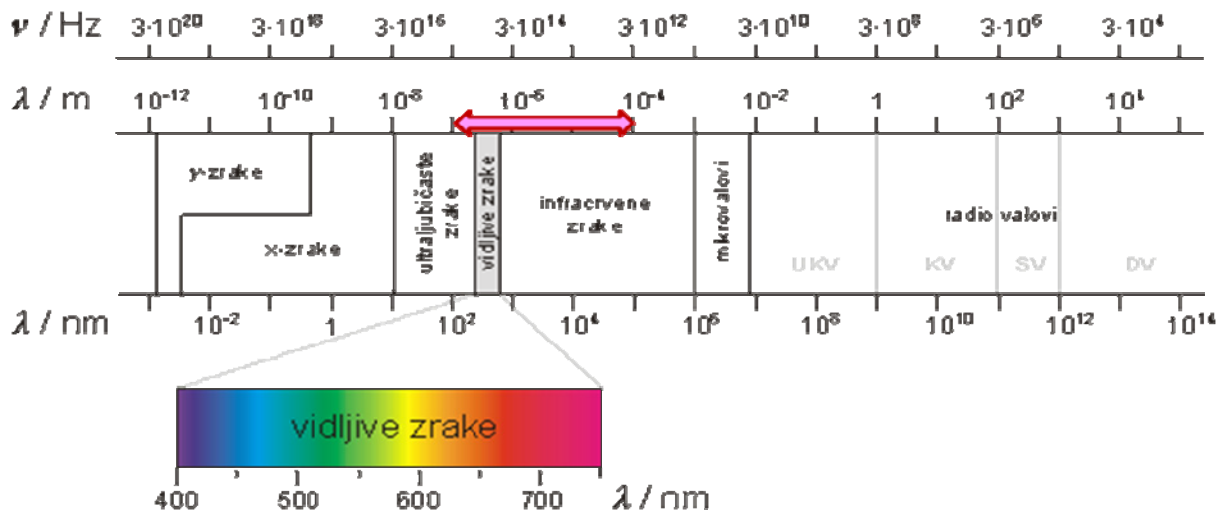
U prethodna dva poglavlja govorilo se o kondukciji i konvekciji za koje je osnovni uvjet postojanje temperaturne razlike točkaka u kontaktu. Da bi došlo do prijenosa topline konvekcijom potreban je, osim temperaturne razlike u pojedinim točkama, i fluid koji se giba te na taj način pospješuje prijenos toplinske energije.

Treći mehanizam prijenosa topline, naziva se **radijacija ili zračenje** pri čemu se toplinska energija pretvara u elektromagnetsko zračenje koje tijelo emitira u okoliš. Prijenos topline ostvaruje se elektromagnetskim valovima između dviju površina različitih temperatura kroz prostor koji omogućuje taj prijenos (prijenos je moguć i u vakuumu).

Intenzitet toplinskog zračenja ovisi o temperaturi i valnoj duljini, strukturi materijala površine s koje se emitira ili se apsorbira energija, a uglavnom se odvija u infracrvenom dijelu spektra. Zračenje se **ne može** opisati Fickovim zakonom kao što je to slučaj pri prijenosu topline na molekularnoj razini ili vrtložnim mehanizmom.

4.4.1. Kako dolazi do zračenja?

Energija dopremljena sustavu uzrokuje promjene na submakroskopskoj razini (molekula i atoma) i prevodi ih u viši energetska nivo. Zbog prirodne tendencije molekula da se vrate na nivo niže energije doći će do emisije energije → *elektromagnetsko zračenje*. Kako je zračenje posljedica promjena energetska stanju atoma i molekula zbog te se energije emitira u određenim valnim područjima. Elektromagnetsko zračenje uključuje sve vrste energije koje putuju valovima: svjetlosno, toplinsko, X zračenje, radio, ultraljubičasti i mikro valovi. Toplinsko zračenje uključuje: usko područje vidljivog dijela spektra te šire područje iznad valnog spektra u području IC dijela zračenja.



Slika 58 Prikaz spektra svjetlosti

U vidljivom dijelu spektra, različite valne duljine imaju različite boje  $0.5 < \lambda < 0.76 \text{ mm}$

Toplinsko zračenje ( $\lambda = 0,1 - 100 \text{ } \mu\text{m}$ ) sastoji se od infracrvenih valova koji su mali dio elektromagnetskog zračenja, a emitira ga tijelo zbog svoje temperature i prenosi se brzinom svjetlosti u vakuumu.

$$c = \lambda \cdot \nu$$

gdje je:

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} \text{ brzina svjetlosti,}$$

$\lambda$  valna duljina zračenja

$\nu$  frekvencija zračenja



4.4.2. Koncept fotona

Da bi se razvio odgovarajući izraz za radijacijski prijenos topline koristit će se **koncept fotona**.

- jedinka koja nema masu i naboj
- posjeduje energiju proporcionalnu frekvenciji

$$E = h \cdot \nu$$

Gdje je  $h$  Planckova konstanta,  $h=6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Zračenje posjeduje svojstva slična česticama i svojstva valova.

Svaki kvant se može promatrati kao čestica koja posjeduje energiju, količinu gibanja i masu, slično kao i molekula plina. Na neki način, o toplinsko zračenje se može promatrati „foton plina“ koji prelazi s jednog mjesta na drugo. Koristeći relativistički odnos između tvari i energije, izrazi za masu i količinu gibanja čestice mogu se izraziti na slijedeći način:

$$E = m \cdot c^2 = h \cdot \nu$$

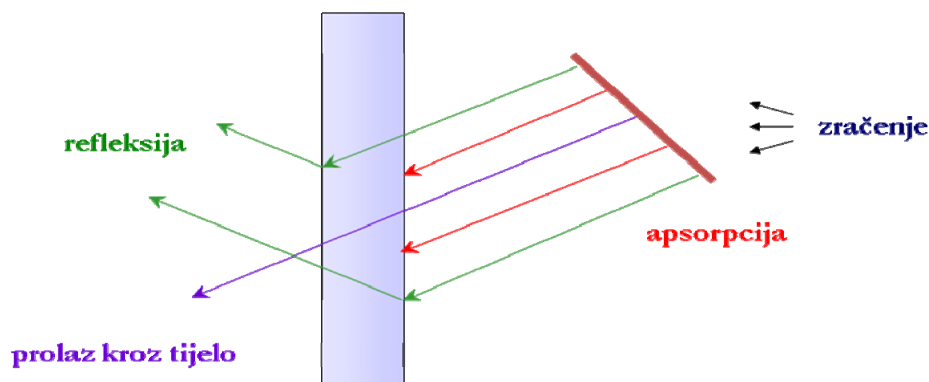
$$m = \frac{h \cdot \nu}{c^2}$$

$$\text{količinagibanja} = c \cdot \frac{h \cdot \nu}{c^2} = \frac{h \cdot \nu}{c}$$

4.4.3. Svojstva toplinskog zračenja

Emisijski spektri su za čvrsta tijela kontinuirani, sastoje se od svih valnih duljina od neke minimalne do maksimalne valne duljine. Osim o temperaturi, oblik spektra i raspored energije po pojedinim valnim duljinama ovisi i o svojstvima površine tijela koje zrači.

Kada zračenje upada na površinu neprozirnog tijela, dio upadnog zračenja se odbija, dio apsorbira. Apsorbirani dio je odgovoran za promjenu temperature **tijela**.



Slika 59. Upadno zračenje na površinu čvrstog tijela

Ukupna energija zračenja je zbroj apsorbirane, reflektirane i propuštene energije i može se izraziti:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_a + \dot{Q}_r + \dot{Q}_d$$

Gdje je:

$\dot{Q}$  ukupna energija zračenja

$\dot{Q}_a$  apsorbirana energije

$\dot{Q}_r$  reflektirana energija

$\dot{Q}_d$  propuštena energija

Dijeljenjem prethodne jednadžbe s ukupnom energijom zračenja dobiva se bezdimenzijska jednadžba istog značenja:

$$a + r + d = 1$$

Gdje je:

$a$  – apsorpcijski faktor

$r$  – refleksijski faktor

$d$  – faktor propusnosti ili diatermije

Za razliku od čvrstih tijela koja apsorbiraju i reflektiraju energiju zračenja svih valnih duljina, plinovi apsorbiraju ili reflektiraju toplinsku energiju u strogo definiranim dijelovima spektra, ali su većim dijelom prozračni.

Općenito, tijela glatke i polirane površine dobro reflektiraju toplinsku energiju. - čvrsta tijela i kapljevine, dok su plinovi diatermička tijela.

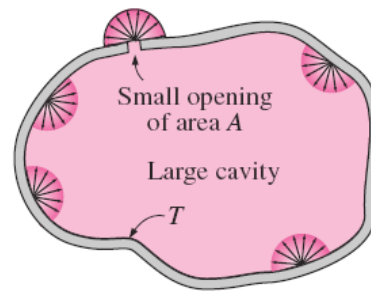
Površine bijele boje dobro reflektiraju energiju vidljivog dijela spektra (hladnjaci, cisterne i spremnici za lako hlapljive kapljevine). Energiju koja se emitira u infracrvenom (IR) dijelu spektra, bijela tijela međutim apsorbiraju gotovo isto kao i crna.

### **Posebni slučajevi:**

APSOLUTNO BIJELO TIJELO - tijelo koje potpuno reflektira energiju,  $r=1$ ,

APSOLUTNO CRNO TIJELO - potpuno apsorbira svu dolaznu energiju,  $a=1$ .

Apsolutno **crno tijelo** je tijelo koje upija sve valne duljine elektromagnetskog zračenja, koje padaju na njega. Idealno crno tijelo ne postoji, ali ga može prilično dobro zamijeniti velika zatvorena šupljina sa malim otvorom i koja je toliko neprozirna da jedva odbija zračenje, budući da zračenje koje uđe u tu šupljinu, gotovo da nema mogućnost izaći iz njega. Budući da idealno crno tijelo upija sve valne duljine bez gubitaka, ono isto emitira sve valne duljine bez gubitaka, ovisno samo o termodinamičkoj temperaturi tog tijela.

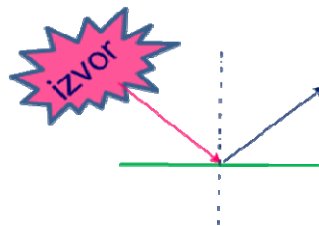


Slika 60. Simulacija crnog tijela

DIJATERMIČKO (PROZRAČNO) TIJELO – sva energija se propušta kroz tijelo,  $d=1$ .

U prirodi se ovakva tijela ne susreću nego su tijela "siva". Odnos apsorbirane, reflektirane i propuštene energije ovisi o: temperaturi tijela i karakteristikama površine.

ZRCALNO TIJELO, tijelo koje pravilno reflektira, energija se reflektira pod kutom upada-



BIJELO TIJELO, površina difuzno reflektira ukupno prispjelo zračenje.



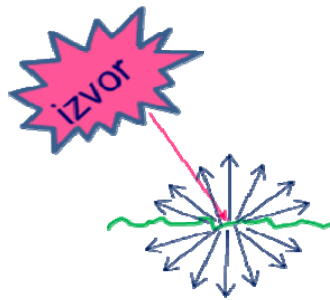
SIVA TIJELA → apsorbiraju jednaki udio zračenja na svim valnim duljinama

OBOJENA TIJELA → prispjelo zračenje apsorbiraju različito po valnim duljinama

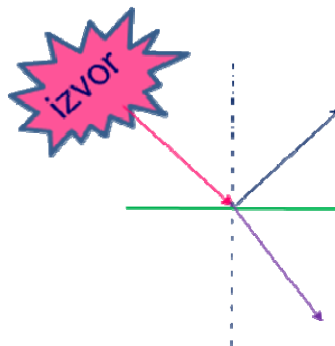
Za većinu krutina i tekućina propuštena energija je zanemariva pa se može pisati:

$$\blacktriangleright a + r = 1$$

HRAPAVA POVRŠINA dio zračenja se reflektira, a dio apsorbira.

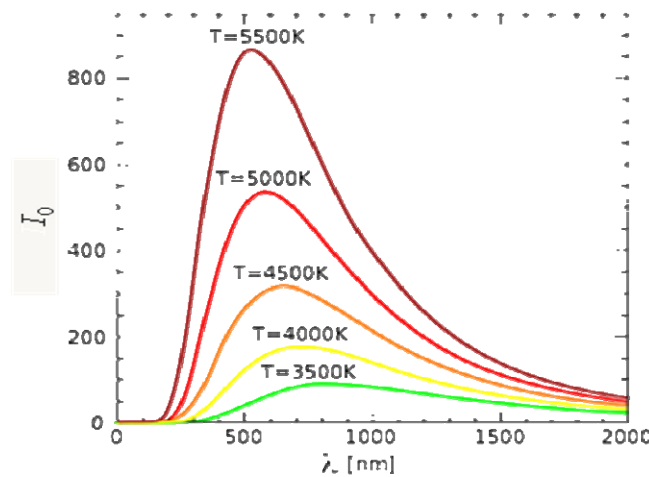


Kod GLATKE POVRŠINE zračenje koje pada pod određenim kutom se djelomično reflektira pod istim kutom, a djelomično apsorbira.



4.4.4. Zakoni koji opisuju toplinsko zračenje

Za realno crno tijelo vrijedi **Planckov zakon**. Intenzitet zračenja apsolutno crnog tijela, ovisan je o temperaturi i valnoj duljini.



Slika 61. Emisijski spektri pri različitim temperaturama

Razdioba energije zračenja po valnim duljinama naziva se spektar. Spektar bitno ovisi o temperaturi tijela: što je temperatura veća to je i ukupna izračena energija veća. Svaki spektar ima maksimum na određenoj valnoj duljini; kako temperatura raste, maksimumi se pomiču prema manjim valnim duljinama.

Izraz za izračunavanje intenziteta zračenja apsolutno crnog tijela:

$$I_0 = \frac{c_1 \cdot \lambda^{-5}}{e^{c_2/\lambda T} - 1}$$

Intenzitet zračenja može se izraziti diferencijalnom jednadžbom:

$$I_0 = \frac{dQ}{d\lambda}$$

A integracijom u određenim graničnim uvjetima dobiva se izraz za toplinski fluks:

$$q_0 = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{c_1}{\lambda^5 \cdot (e^{c_2/\lambda T} - 1)} \cdot d\lambda = \frac{6,494 \cdot c_1}{c_2^4} \cdot T^4$$

**Wienov zakon** pomaka daje valnu dužinu maksimalnog intenziteta zračenja. Valna dužina kod koje je zračenje crnog tijela maksimalno ovisi o temperaturi tijela i pomiče se prema dužim valnim duljinama za niže temperature.

$$\lambda_{\max} = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{T}$$

**Stefan-Boltzmannov zakon** određuje intenzitet zračenja nekog tijela. Sposobnost zračenja apsolutno crnog tijela, proporcionalna je četvrtoj potenciji apsolutne temperature i vrijedi za zračenje u svim smjerovima.

$q_0 = \sigma_0 \cdot T^4$  ili se može izraziti preko koeficijenta zračenja apsolutno crnog tijela,  $c_0$ :

$$q_0 = c_0 \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4$$

Stefan-Boltzmanova konstanta  $\sigma = 5,669 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-4}$

Koeficijent zračenja apsolutno crnog tijela  $c_0 = 5,77 \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-4}$

Pokazalo se da se Stefan – Boltzmanov zakon može primijeniti i na siva tijela:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{q}{q_0} = \varepsilon$$

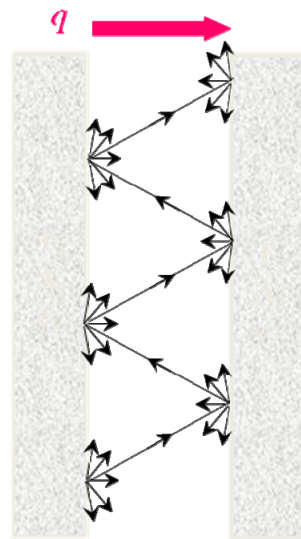
Koeficijent zračenja može se izvesti iz stupnja crnoće

$$\varepsilon = \frac{q}{q_0} = \frac{c \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4}{c_0 \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4} = \frac{c}{c_0} \quad c = \varepsilon \cdot c_0$$

Fluks toplinske energije zračenja sivog tijela:

$$q_0 = c \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4 = c_0 \cdot \varepsilon \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4$$

Izmjena topline između dvije bliske paralelne plohe



Slika 62. Izmjena topline između dvije bliske paralelne plohe

$$q = q_1 - q_2 = C_1 \cdot \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - C_2 \cdot \left(\frac{T_2}{100}\right)^4$$

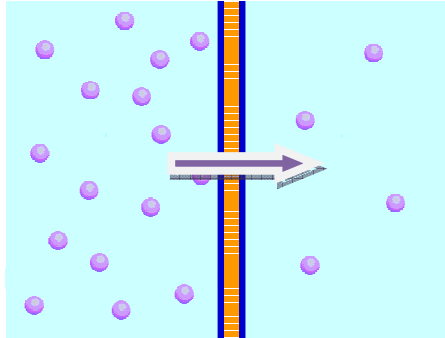
$$q = C_{12} \cdot \left[ \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right]$$

$$C_{12} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_0}}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

## 5. PRIJENOS TVARI

Kada se sustav sastoji od dvije ili više komponenti čije se koncentracije razlikuju od točke do točke, postoji prirodna tendencija za smanjenjem razlika unutar sustava te dolazi do prijenosa tvari, a zatim i do uspostavljanja ravnotežnog stanja



**Slika 63 :Prijenos komponente iz područja više koncentracije u područje niže koncentracije**

Proces prijenosa tvari prisutan je u većini industrijskih procesa budući da se većina tehnoloških operacija zasniva na kontaktu različitih faza pri čemu komponenta iz jedne faze prelazi u drugu.

Osnova je industrijskih i separacijskih procesa, kao i procesa pročišćavanja:

- ✓ Sušenje
- ✓ Ekstrakcija
- ✓ Destilacija
- ✓ Apsorpcija
- ✓ Kristalizacija

Do prijenosa tvari dolazi zbog

- ✓ razlike u koncentraciji
- ✓ postojanja gradijenta tlaka (difuzija pod tlakom)
- ✓ djelovanje vanjske sile (djelovanjem električnog polja )
- ✓ postojanje temperaturnog gradijenta (toplinska difuzija)

Dodatkom kapi koncentrirane boje u vodu doći će do raspršivanja boje u vodi do postizanja potpune izmiješanosti.

Postoje dva procesa koji će tomu doprinijeti:

**DIFUZIJA** do koje dolazi zbog mjestimične razlike u koncentraciji tvari (boje). Proces će se odvijati do postizanja ravnoteže, uniforme raspodjele boje u vodi. Ovakav proces se može

odvijati i pri miješanju čvrstih tvari, ali u tom slučaju proces je znatno sporiji i neće se postići u konačnom vremenu.

Drugi proces koji doprinosi izmiješanosti naziva se KONVEKCIJA. Na ovaj način se doprinosi prijenosu molekula boje do udaljenih mjesta u posudi.

Bez obzira o kakvom se prijenosu tvari radi (molekularnom ili vrtložnom) konstantan koncentracijski gradijent znači da se radi o stacionarnom prijenosu tvari:  $\frac{(dc/dy)}{dt} = 0$

Ako je  $\frac{(dc/dy)}{dt} \neq 0$  govorimo o nestacionarnom prijenosu tvari.

Kao i kod prijenosa količine gibanja i topline, vrijedi zakon očuvanja:

$$V \cdot \frac{dX_v}{dt} = \dot{V}_{ul} \cdot X_{v,ul} - \dot{V}_{izl} \cdot X_{v,izl} + V_r$$

Gdje

$X_v$  – predstavlja količinu prenesene tvari po jedinici volumena

$c$  - molna koncentracija, mol m<sup>-3</sup>

$\gamma$  - masena koncentracija, kg m<sup>-3</sup>

Kod prijenosa tvari javljaju se određene posebnosti:

- ✓ Akumulacija tvari složena (ovisi o koncentracijama reaktanata, temperaturi, zbog kemijske reakcije – generacija)
- ✓ Međufaznu površinu – teško definirati ili mjeriti
- ✓ Difuzijski koeficijent ima male vrijednosti (usporedba s transportnim koeficijentima za prijenos količine gibanja i topline).

### 5.1. Molekularni mehanizam prijenosa tvari – difuzija

Molekularna difuzija je migracija jedne vrste čestica tvari unutar smjese koja se sastoji od dvije ili više komponenata, može se odvijati unutar plinova, kapljevine ili čvrstog materijala.

Do prijenosa dolazi zbog razlike koncentracija sve do ravnotežnog stanja (izjednačenja koncentracija). Difuzija je vrlo spor proces, npr. u plinovima difuzija molekula se odvija brzinama od 5 cm/min, u kapljevina 0,05 cm/min, a u krutinama 10<sup>-5</sup> cm/min. Razlog ovako sporom procesu je veliki broj sudara (nekoliko milijuna po sekundi i cm<sup>3</sup>) što ometa molekule u gibanju. Tako je slobodan put koji prijeđe molekula između dva sudara iznosi svega 10<sup>-5</sup>cm. Proces difuzije se puno brže odvija na višim temperaturama i nižim tlakovima kada se povećava srednja



brzina molekula, odnosno smanjuje koncentracija molekula. Molarna masa molekule također utječe na brzinu difuzije, lakše molekule gibaju se brže od težih.

Gustoća toka tvari za molekularni mehanizam prijenosa općenito se može izraziti  $\phi = \kappa \cdot \frac{\Delta}{y}$ , a

kada se govori o gustoći prijenosa tvari, ovisno o načinu iskazivanja koncentracije ovaj izraz

prelazi u slijedeći oblik:  $N_A = -D_A \frac{dc_A}{dy}$  ili  $\dot{m}_A = -D_A \frac{d\gamma_A}{dy}$ .

$\gamma_A$  – masena koncentracija komponente A, kg m<sup>-3</sup>

$c_A$  – molna koncentracija komponente A, mol m<sup>-3</sup>

$D_A$  – koeficijent difuzivnosti, m<sup>2</sup> s<sup>-1</sup>

$dc_A/dy$  – koncentracijski gradijent

Ove jednadžbe predstavljaju Fickov zakon koji je osnovna jednadžba prijenosa tvari difuzijom. Kvantitativni opis je mnogo složeniji od opisa procesa prijenosa količine gibanja i topline do kojih dolazi u jednofaznom sustavu jer do prijenosa tvari dolazi u smjesama što uključuje utjecaj svake pojedinačne komponente na prijenos tvari (ukoliko se promijeni koncentracija jedne komponente u sustavu doći će do promjene koncentracije i ostalih komponenti).

Molni ili maseni tok po jediničnoj površini proporcionalan je koncentracijskom gradijentu i transportnom koeficijentu koji se naziva difuzijski koeficijent. Jedinice ovog transportnog koeficijenta su kao i u slučaju kinematičke viskoznosti u Newtonovom zakonu ili koeficijentu temperature vodljivosti u Fourierovu zakonu, m<sup>2</sup>·s<sup>-1</sup>.

Pokretačku silu moguće je izraziti na različite načine budući da se i koncentracija tvari iskazuje na različite načine ovisno o sustavu (molna koncentracija, masena koncentracija, molni ili maseni udio, a za plinsku fazu uobičajeno je koristiti parcijalne tlakove).

### 5.1.1. Difuzijski koeficijent

Ovaj transportni koeficijent ima vrijednosti koje se znatnije razlikuju za različite sustave. Vrijednosti difuzijskih koeficijenata ukazuju da će kontrolirajući mehanizam pri prijenosu tvari (posebno za prijenos u kapljevinu ili čvrstom) biti molekularna difuzija. Koncentracija ima utjecaj na vrijednost difuzijskog koeficijenta za sve sustave (osim plin-plin), ovisi o tlaku, temperaturi i sastavu smjese, a određuje se eksperimentalno ili korištenjem semiteoretskih izraza.

Sustav	$D, m^2 s^{-1}$
Plin-plin	$10^{-6}$ - $10^{-5}$

Tekuće-tekuće	$10^{-10}$ - $10^{-9}$
Tekuće-čvrsto	$10^{-11}$ - $10^{-9}$
Plinovito-čvrsto	$10^{-14}$ - $10^{-11}$
Čvrsto-čvrsto	$10^{-34}$ - $10^{-19}$

5.1.2. Prijenos tvari difuzijom u stacionarnim uvjetima

Ukoliko imamo smjesu koja se sastoji od dvije komponente A i B i giba se brzinom  $v$  uzduž osi  $y$  Gustoća toka smjese koji se prenosi gibanjem brzinom  $v$  možemo izraziti:

$$N = v \cdot c$$

Ukupna gustoća toka smjese može se izraziti i kao zbroj gustoće toka komponente A i B:

$$N_A + N_B = v \cdot c$$

Za komponentu A vrijedi:  $(N_A + N_B) \cdot \frac{c_A}{c} = v \cdot c_A$ .

Pri gibanju smjese, potrebno je razlikovati gibanje ukupne smjese i difuzije koja se događa unutar smjese. Difuzivnost komponente A (ili B) definira se kao relativna brzina u odnosu na brzinu gibanja smjese:  $N_A = c_A \cdot (v_A - v)$ .

$$\text{Difuzija komponente A u smjesi: } N_A = c_A \cdot (v_A - v) = -D_{AB} \cdot \frac{dc_A}{dy}$$

$$\text{Difuzija komponente B u smjesi: } N_B = c_B \cdot (v_B - v) = -D_{BA} \cdot \frac{dc_B}{dy}$$

$$\text{Dalje slijedi: } v_A \cdot c_A - v \cdot c_A = -D_{AB} \cdot \frac{dc_A}{dy}$$

$$v_A \cdot c_A - (N_A + N_B) \cdot \frac{c_A}{c} = -D_{AB} \cdot \frac{dc_A}{dy}$$

$$v_A \cdot c_A = -D_{AB} \cdot \frac{dc_A}{dy} + (N_A + N_B) \cdot \frac{c_A}{c}$$

$$N_A = -D_{AB} \cdot \frac{dc_A}{dy} + (N_A + N_B) \cdot \frac{c_A}{c}$$

Gdje je  $D_{AB} \cdot \frac{dc_A}{dy}$  fluks tvari uzrokovan difuzijom, a  $(N_A + N_B) \cdot \frac{c_A}{c}$  fluks tvari uzrokovan gibanjem mase fluida. Ovaj izraz se može riješiti uz poznavanje odnosa molnih količina gibanja komponenata A i B.

Razlikuju se dva granična slučaja:

1. Ekvimolarna protustrujna difuzija ( $N_A + N_B = 0$ )
2. Jednokomponentna difuzija tj. difuzija komponente A kroz nepokretnu (inertnu) komponentu B ( $N_B = 0$ )

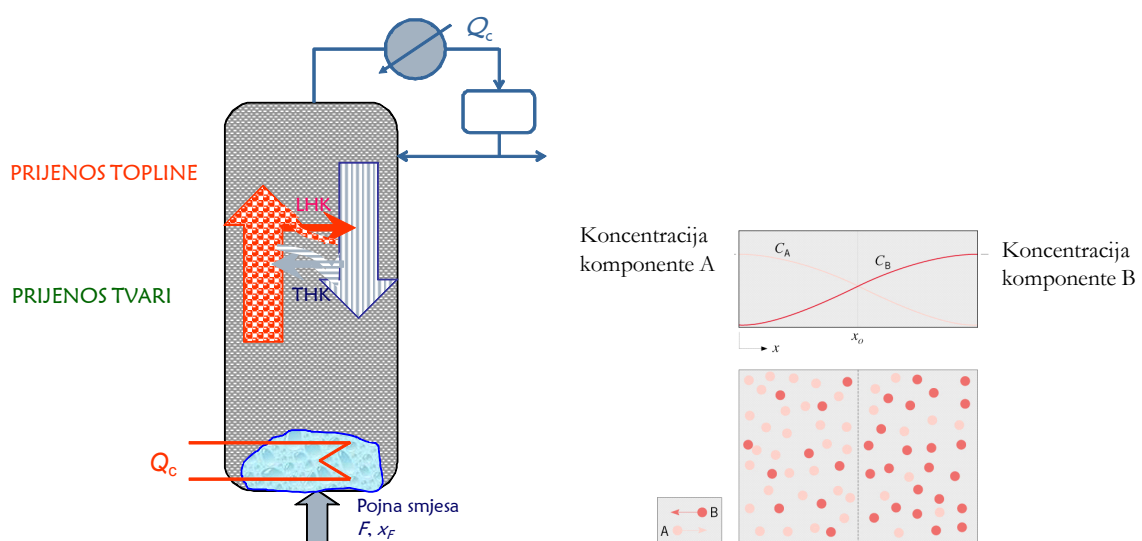
**Ekvimolarna protustrujna difuzija** – temelj je proučavanja toplinskih separacijskih procesa kod kojih dolazi do prijenosa tvari kroz granicu faza u oba smjera. Npr. kod destilacije dvokomponentne smjese sličnih latentnih toplina isparavanja  $N_A + N_B = 0$

Opći oblik jednadžbe može se pisati:

$$N_A = \frac{D}{\delta_D} \cdot (c_{A1} - c_{A2}) \text{ za kapljevine}$$

$$N_A = \frac{D}{RT\delta_D} \cdot (p_{A1} - p_{A2}) \text{ za plinove}$$

Raspodjela koncentracija je linearna. Komponente difundiraju s istim molarnim brzinama u suprotnom smjeru, a difuzijski koeficijent,  $D$  je konstantan.

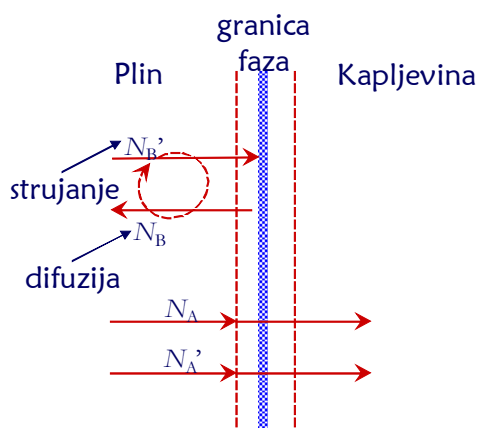


Slika 64. Primjer ekvimolarnе protustrujne difuzije - prijenos topline i tvari u destilacijskoj koloni

U rektifikacijskoj koloni (destilacijska kolona s povratom) dolazi do izmjene topline između tople struje pare koja se diže prema vrhu kolone i refluksa koji ide prema dnu. Kako se para hladi, a kapljevina zagrijava, LHK u kapljevine će ispariti te prijeći granicu faza u paru, a THK iz pare nakon ukapljivanja nastavit će put prema dnu sa refluksom. Dakle došlo je do, osim prijenosa topline, i do prijenosa tvari u oba smjera. Koliko je LHK prešlo iz kapljevine u paru, došlo je do obrnutog prijenosa THK u istoj količini.

### Difuzija komponente A kroz nepokretnu komponentu B

Difuzija komponente A kroz nepokretnu komponentu B (jednokomponentna difuzija) odvija se kada jedna komponenta difundira kroz mirujući sloj. Komponenta A difundira kroz granicu faza, a pokretačka sila može se izraziti kao razlika u parcijalnim tlakovima komponente A u dvije faze  $p_{a1}-p_{a2}$  ili razlika u molarnim koncentracijama  $c_{a1}-c_{a2}$ . Komponenta B ne difundira, ali joj se mijenja koncentracija ili parcijalni tlak., budući se mijenja koncentracija komponente A.



Slika 65. Primjer difuzije komponente A kroz nepokretnu komponentu B - prijenos komponente A kroz granicu faza

Primjer jednokomponentne difuzije u separacijskim procesima je: apsorpcija plina u kapljevine, isparavanje, sušenje...

Komponenta A do granice faza dolazi difuzijom. Otpor prijelazu javlja se uz granicu faza – difuzijski granični sloj (na slici označeno crtkanom linijom).

$$\text{Difuzijski fluks: } N_A = -D \cdot \frac{dc_A}{dy}$$

$$\text{Fluks uzrokovan gibanjem: } N_A' = v_A \cdot c_A$$

$$\text{Ukupni fluks komponente A: } N_{A,uk} = N_A + N_A'$$

Gdje je:

$N_A, N_B$  - difuzijski fluks

$N_A', N_B'$  - fluks usred gibanja

Fluks uzrokovan gibanjem  $N_A' (v_A = v_B = v)$ :

$$v_A = \frac{N_A'}{c_A} = v_B = \frac{N_B'}{c_B}$$

$$N_A' = v_B \cdot c_A \text{ odnosno } N_A' = N_B' \cdot \frac{c_A}{c_B}$$

Ukupni fluks kroz granicu faza komponente B:  $N_B + N_B' = 0$

Fluks A difuzijom = fluksu B difuzijom:  $N_A = -N_B$  te je  $N_A' = N_A \cdot \frac{c_A}{c_B}$

Ukupni fluks komponente A:

$$N_{A,uk} = N_A + N_A' = N_A + N_A \frac{c_A}{c_B} = N_A \cdot \left(1 + \frac{c_A}{c_B}\right) = N_A \cdot \left(\frac{c_A + c_B}{c_B}\right)$$

Dobiva se Stephanov zakon difuzije koji vrijedi za jednokomponentnu difuziju:

$$N_{A,uk} = -D_A \cdot \frac{dc_A}{dy} \cdot \frac{c}{c_B}$$

$$\text{Integriranjem se dobije: } N_{A,uk} = \frac{D \cdot \bar{c}}{\delta_D \cdot \bar{c}_B} \cdot (c_{A1} - c_{A2})$$

Za prijenos tvari u plinovima, umjesto koncentracije mogu se koristiti parcijalni tlakovi, u gornju

jednadžbu uvrsti se izraz za molnu koncentraciju iz opće plinske konstante:  $c_A = \frac{p_A}{R \cdot T}$

Za plinove jednadžba ima sljedeći oblik:  $N_A = -\frac{D \cdot P}{RT_{GF} \delta_D \cdot p_{B,LM}} \cdot \Delta p_{A,LM}$

$$p_{B,LM} = \frac{p_{B,ulaz} - p_{B,izlaz}}{\ln \frac{p_{B,ulaz}}{p_{B,izlaz}}}$$

Gdje je:

$P$  - ukupni tlak smjese

$\Delta p_{A,LM}$  - pokretačka sila aktivne komponente

$\Delta p_{B,LM}$  - logaritamska srednja vrijednost parcijalnih tlakova inertne komponente na ulazu i izlazu.

$\bar{c} = \frac{c_1 + c_2}{2}$  - srednja vrijednost koncentracije u sustavu

$c_1 = c_{A1} + c_{B1}$  - koncentracija u fazi 1

$c_2 = c_{A2} + c_{B2}$  - koncentracija u fazi 2

$$\bar{c}_B = c_{B,ARITM} = \frac{c_{B1} + c_{B2}}{2} \text{ srednja aritmetička vrijednost komponente B u obje faze}$$

$$\bar{c}_B = c_{B,LM} = \frac{c_{B2} - c_{B1}}{\ln \frac{c_{B2}}{c_{B1}}} \text{ srednja logaritamska vrijednost komponente B u obje faze.}$$

### 5.2. Prijenos tvari konvekcijom

Prijenos tvari konvekcijom odvija se između površine granice faza i fluida koji struji ili između dva relativno nemješljiva fluida koji struje, jednadžba kojom se izražava molni ili maseni fluks slična je kinetičkoj jednadžbi prijenosa topline:

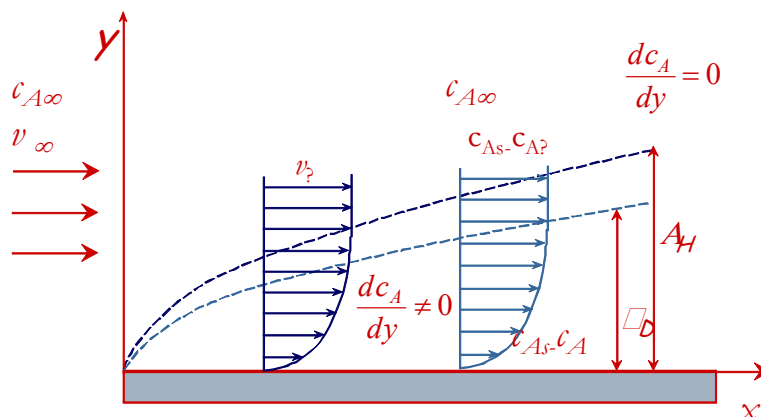
$$N_A = K_c \cdot \Delta c_A \text{ ili } N_A = K_y \cdot \Delta Y_A \text{ ili } N_A = K_g \cdot \Delta P_A.$$

U jednadžbama je pokretačka sila izražena na različite načine, a bez obzira na način izražavanja odnosi se na razliku koncentraciju uz nepokretnu površinu i u masi fluida. Koeficijent prijenosa tvari ovisi o svojstvima fluida, dinamičkim karakteristikama fluida koji struji i o geometriji promatranog sustava. Bez obzira na izraženu koncentraciju, molni fluks je isti pri istim uvjetima pa vrijedi.

$$K_c \cdot \Delta c_A = K_y \cdot \Delta Y_A$$

#### 5.2.1. Difuzijski granični sloj

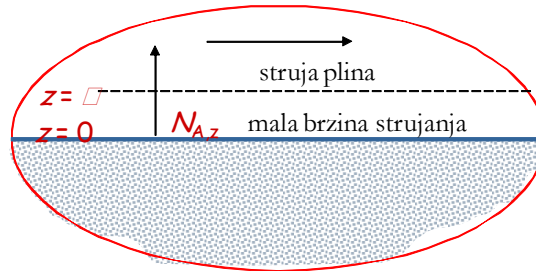
Pri prijenosu tvari u struji fluida kao i kod prijenosa količine gibanja i topline formira se granični sloj. Ovaj sloj se naziva difuzijski ili koncentracijski granični sloj. Unutar njega postoji koncentracijski gradijent, odnosno raspodjela koncentracija tvari. Općenito, sva dosadašnja razmatranja o graničnom sloju o kojima se govorilo pri prijenosu količine gibanja i topline vrijede i u ovom slučaju.



**Slika 66. koncentracijski granični sloj unutar hidrodinamičkog graničnog sloja**

Odnos debljina koncentracijskog i hidrodinamičkog graničnog sloja definiran je prema izrazu

Polhausena: 
$$\frac{\delta_H}{\delta_D} = Sc^{1/3}$$



**Slika 67. Primjer formiranja graničnog u struji zraka pri isparavanju vode sa čvrste površine**

Da bi se odredila vrijednost koeficijenta prijenosa tvari potrebno je poznavati debljinu graničnog sloja. Kako je ovu veličinu teško odrediti kao i kod prijenosa topline za određivanje koeficijenta prijenosa tvari koriste se bezdimenzijske kriterijske jednadžbe.

Dimenzijskom analizom izvedene su bezdimenzijske kriterijske jednadžbe koje povezuju sljedeće bezdimenzijske značajke:

Sherwoodova značajka,  $Sh$  koja je ekvivalentna  $Nu$  značajci u prijenosu topline.  $Sh$  značajka predstavlja odnos ukupno prenesene tvari i tvari prenesene difuzijom:

$$Sh = \frac{K \cdot \ell}{D}$$

Schimidtova značajka analogna je  $Pr$  značajci kod prijenosa topline, predstavlja odnos mogućnosti fluida da prenosi tvar i količinu gibanja molekularnim mehanizmom, odnosno definira odnos debljina graničnih slojeva (difuzijskog i hidrodinamičkog).

$$Sc = \frac{\nu}{D} = \frac{\eta}{\rho \cdot D}$$

Pored  $Pr$  i  $Sc$  značajke, definirana je i Lewisova značajka koja daje odnos toplinske i masene difuzivnosti, odnosno debljina toplinskog i koncentracijskog graničnog sloja.

$$Le = \frac{a}{D_{AB}} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p \cdot D_{AB}}$$

Ovisno da li se radi o prirodnoj ili prisilnoj konvekciji kriterijske jednadžbe imaju oblik:

Opći oblik bezdimenzijskih korelacija:

za prisilnu konvekciju  $Sh = k \cdot Re^m \cdot Sc^n$

za prirodnu konvekciju  $Sh = k \cdot Gr^m \cdot Sc^n$



**LITERATURA:**

Interna skripta, Prijenos tvari i energije, prof. dr.sc. Antuna Glasnovića, i prof. dr.sc. Aleksandra Sander.

Fluid mechanics; Fundamentals and Applications, Yunus A. Çengel, John M. Cimbala, McGraw-Hill, New York, 2006

R.Byron Bird, Transport Phenomena, Revised 2nd Edition, J. Wiley, Sons, 2006.

Richard G. Griskey, Transport Phenomena and Unit Operations: A Combined Approach, J. Wiley, Sons, 2006.